

Pokorádi László

Hibafaelemzés korrelációs érzékenységvizsgálata

A hibafaelemzés egy szisztematikus, logikai és diagramalapú kockázatértékelési, megbízhatóságelemzési eszköz, amely bemutatja egy adott nemkívánatos eseményhez, az úgynevezett csúcseseményhez vezető ok-okozati összefüggéseket. Azok az események, amelyek már nem bonthatók tovább, az alapesemények. A valószínűségi hibafaelemzés egy kvantitatív elemzési módszer, amelyet a csúcsesemény bekövetkezési valószínűségének meghatározására használnak az alapesemények valószínűségeinek függvényében. A különböző szintű események megbízhatóságai, bekövetkezési valószínűségei közötti korrelációs együtthatók elemzése hatékony módszer a rendszer megbízhatóságára legnagyobb hatást gyakorló kritikus alapesemények, elemek kiválasztására. A tanulmány célja egyrészt egy korrelációalapú módszer kidolgozása a valószínűségi hibafaelemzés érzékenységeinek vizsgálatára. Másrészt az így kapott érzékenységi eredmények összehasonlítása a szerző korábban kidolgozott lineáris hibafa érzékenységi modell eredményeivel.

Kulcsszavak: megbízhatóság, kockázatbecslés, hibafaelemzés, korreláció, érzékenységvizsgálat

1. Bevezetés

Úgynevezett nemkomplex kapcsolatú (*System with Simple Interconnections* – SwSI) rendszerekről akkor beszélhetünk, ha a teljes rendszer megbízhatósága az elemek soros, illetve párhuzamos kapcsolatokba (részrendszerekbe) rendezésével, az így kapott részrendszerek megbízhatóságának ismeretében meghatározható. [5]

Soros megbízhatóságúnak nevezzük azt a rendszert, amelyikben bármelyik elem meghibásodása a rendszer üzemképtelenségét okozza.

Párhuzamos megbízhatóságúnak nevezzük azt a rendszert, amelyik mindaddig üzemképes, amíg egyetlen eleme is még működőképes. Egy párhuzamos rendszer redundáns, azaz mindig tartalmaz tartalékot.

Fontos hangsúlyozni, hogy a megbízhatóság szempontjából vizsgált modellekben a soros és párhuzamos kapcsolat nem azonos az elemek valóságban (térben és/vagy időben) elfoglalt helyzetével. A modell készítésekor fontos tisztában lennünk a szerkezet működésével, és ez alapján kell meghatároznunk az elemek közti megbízhatósági kapcsolatot.

A nemkomplex kapcsolatú rendszerek hibafaelemzése (*Fault Tree Analysis*, FTA) során egy feltételezett rendszerhibából vagy nemkívánatos eseményből, az úgynevezett főeseményből (*Top Event*, TE) indulunk ki, és fokozatosan derítjük fel azokat a részrendszer- és alkotóelem-meghibásodási lehetőségeket, amelyek az adott, nem kívánt esemény bekövetkezéséhez

vezetnek vagy vezethetnek [2], [7]. Ez utóbbiakat, amelyek már nem bonthatók tovább, elemi eseményeknek (*Basic Events*, BEs) nevezzük.

Az elemző munkát fastruktúrájú gráf megjelenítés segíti, amit különböző, például megbízhatósági számítások is kiegészíthetnek. A felállított hibafa felhasználásával a csúcsesemény bekövetkezési valószínűsége meghatározható az elemi események valószínűségeinek függvényében. Ezt nevezzük valószínűségi hibafaelemzésnek (*Probabilistic Fault Tree Analysis*).

Két jelenség közötti kapcsolatot sztochasztikusnak nevezünk, ha az egyik lefolyása befolyásolja a másikat, de nem egyértelműen [4]. Két véletlen változó sztochasztikus kapcsolatának erősségét a korrelációs együtthatójukkal lehet jellemezni. Hibafaelemzés esetén a különböző – főleg a fő- és az elemi – események bekövetkezési valószínűségei közti korrelációs együtthatók alkalmasak a felsőbb szintű esemény megbízhatóságára legnagyobb hatást gyakorló kritikus események, elemek kiválasztására.

A korrelációs együtthatók korrekt meghatározásához a meghibásodási adatok statisztikai sokaságára van szükségünk. Napjaink technikai rendszereinél a kellő számú adatok beszerzése nehézséget okozhat, mert viszonylag hamar avulhatnak el. Új technikai rendszer tervezésekor a korábbi, hasonló szerkezetű rendszerek üzemeltetési tapasztalatai használhatók fel. Ezért a megfelelő számú kiinduló adat nyerésére, és így a megbízhatósági számítások elvégzésére a Monte Carlo-módszert célszerű alkalmazni. Ekkor a rendszer gerjesztéseinek minden lehetséges eleméhez valamilyen valószínűségi eloszlást rendelünk, és ez alapján a rendszer kimenő jellemzőinek valószínűségi eloszlásait határozzuk meg. Ha az adatok valószínűségi eloszlásai ismertek, elméletileg mindegyik alternatíva következményeinek eloszlását is megtudhatjuk. Ez a vizsgált rendszer vagy folyamat kvalitatív tulajdonságának valószínűségi eloszlását jelenti.

A kutatómunka célja egyrészt egy korrelációalapú vizsgálati módszer kidolgozása a valószínűségi hibafaelemzés érzékenységeinek meghatározására, másrészt a kapott eredmények összehasonlítása a szerző korábban – a [10] és [11] publikációiban – kidolgozott lineáris hibafa érzékenységi modell (*Linear Fault Tree Sensitivity Model*, LFTSM) eredményeivel.

Mivel a jelen tanulmány célja a kidolgozott eljárás módszertanának bemutatása, a kis méretű hibafát vizsgáljuk, amelyben nem a valóságos technikai rendszerek meghibásodási adatait használjuk a szemléletesebb eredmények érdekében.

2. Hibafaelemzés

A hibafaelemzés módszertanát részletesen az IEC 1025 [2] és MSZ EN 1050 [7] szabványokból tudjuk megismerni. Az 1. táblázat mutatja be a hibafaalap jelölésrendszerét.

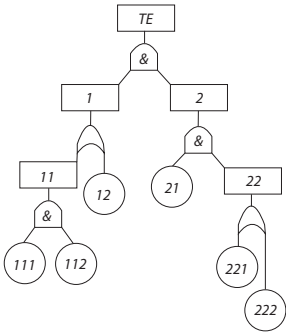
Az elemzés lehetővé teszi:

- a főeseményhez vezető összes hiba és hibakombináció felderítését;
- a különösen kritikus események és/vagy eseményláncolatok kimutatását;
- megbízhatósági elemzések elvégzését a hibafa ágain végighaladva;
- a meghibásodási mechanizmusok tiszta és áttekinthető dokumentálását.

1. táblázat
A hibafaelemzés főbb jelölései [a szerző]

	ÉS kapu A kimeneti esemény csak akkor következik be, ha az összes bemeneti esemény bekövetkezik (párhuzamos kapcsolat).	$P = \prod_{i=1}^n P_i$
	VAGY kapu Azt jelenti, hogy ha legalább egy bemeneti esemény bekövetkezik, kimeneti esemény akkor következik be (soros kapcsolat).	$P = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i)$
	Elemi esemény Az elemi esemény nem igényel további feltárást, vagy nem tárható fel.	
	Közbülső esemény Az esemény bekövetkezik, ha egy vagy több olyan megelőző ok merült fel, amelyek logikai kapukon keresztül fejtik ki hatásukat az adott eseményre.	

Az 1. ábra az esettanulmány során elemzett hibafát szemlélteti.



1. ábra
Hibafa (példa) [a szerző]

Első lépésként az elemi események azonos bekövetkezési valószínűségeivel határozzuk meg a főesemény bekövetkezési valószínűségét. A számítási eredményeket szemlélteti a 2. ábra. Látható, hogy a főesemény bekövetkezési valószínűsége nem lineárisan változik az elemi események (azonos) bekövetkezési valószínűségei függvényében. Ez azt jelenti, hogy a hibafaelemzés megbízhatósági modellje nemlineáris rendszert alkot.

A vizsgált hibafa megbízhatósági, azaz a szimulációs eljárás magmodellje:

$$P_{TE} = P_1 P_2 \tag{1}$$

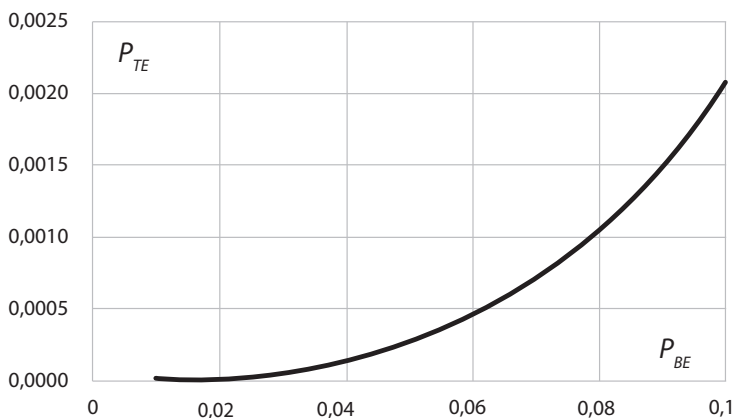
$$P_1 = 1 - ((1 - P_{11})(1 - P_{12})) \tag{2}$$

$$P_2 = P_{21} P_{22} \tag{3}$$

$$P_{11} = P_{111} P_{112} \tag{4}$$

$$P_{22} = 1 - ((1 - P_{221})(1 - P_{222})) \tag{5}$$

A további vizsgálatunkhoz először az elemi események – névleges (átlagos vagy jellemző) bekövetkezési valószínűségeit kell meghatároznunk, amelyeket a 2. táblázat tartalmaz. Ezek alapján, az (5)–(1) egyenletek felhasználásával (visszafelé haladva) meghatározhatók a közbülső események, valamint a főesemény névleges bekövetkezési valószínűsége (3. táblázat).



2. ábra

A főesemény bekövetkezési valószínűsége az elemi események (azonos) valószínűségei függvényében [a szerző]

2. táblázat
Kiinduló meghibásodási adatok [a szerző]

$P_{12} = 0,01$	$P_{21} = 0,02$	$P_{111} = 0,05$
$P_{112} = 0,06$	$P_{221} = 0,04$	$P_{232} = 0,03$

3. táblázat
Számított valószínűségi értékek [a szerző]

$P_{22} = 0,068800$	$P_{11} = 0,003000$
$P_2 = 0,001376$	$P_1 = 0,012970$
$P_{TE} = 1,178461 \cdot 10^{-5}$	

3. Korrelációs érzékenységelemzés

Egy korrelációs együttható két véletlen változó közti sztochasztikus kapcsolat lineáris erősségét jellemzi [1].

A véges pozitív átlagértékű η és μ véletlen változók közti keresztkorrelációs együttható a következő formában írható fel:

$$R(\eta, \mu) = \frac{M((\eta - M(\eta))(\mu - M(\mu)))}{D(\eta)D(\mu)} \quad (6)$$

ahol:

M – várható (átlag) érték;

D – szórás.

A korrelációs együttható mindig -1 és $+1$ között van, azaz

$$-1 \leq R(\eta, \mu) \leq 1 \quad (7)$$

Ha η és μ nem függenek egymástól, akkor

$$R(\eta, \mu) = 0 \quad (8)$$

Véges pozitív átlagértékű η és μ véletlen változók korrelációs együtthatója ($R_{\eta\mu}$) a következő egyenlettel becsülhető meg:

$$R_{\eta\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \sum_{j=1}^n x_j \right) \left(y_i - \sum_{j=1}^n y_j \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^n y_j \right)^2}} \quad (9)$$

az $x_1, x_2, \dots, x_n$ és $y_1, y_2, \dots, y_n$ minták segítségével, amelyek az η és μ változókhoz tartoznak [4].

4. Monte Carlo-szimuláció

Monte Carlo-módszereknek nevezzük a matematikai feladatok megoldásának véletlen mennyiségek modellezését felhasználó numerikus módszereit és azok jellemzőinek statisztikus értékelését [12]. A Monte Carlo matematikai eszköz, amely alkalmas arra, hogy véletlen események sorozatával oldjunk meg determinisztikus problémákat [3].

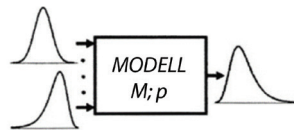
A szimulációs elemzési eljárás alapvetően Metropolis és Ulam [6] publikációjához köthető, amelyben a szerzők a módszert Monte Carlo-nak nevezték el. Őket megelőzően is már alkalmaztak statisztikai mintavételezési elemző módszereket a természettudományokban. Talán a legkorábbi dokumentált véletlenszerű mintavétel az integrál megoldásának megtalálására Comte De Buffon (1777-ben) nevéhez fűződik, illetve William Thomson (más néven: Lord Kelvin) 1901-ben a klasszikus rendszerek belső energia-egyensúlyát vizsgálta az atomok és molekulák véletlen ütközéseinek modellezésével [8].

A szimulációs eljárás lényege, hogy az egyes bizonytalan tényezőkhöz rendelt valószínűségeloszlások alapján véletlenszerűen választunk ki értékeket, amelyeket a szimulációs vizsgálat egy-egy kísérletében felhasználunk.

A technikai rendszerek szimulációs elemzése esetén a következő lépéseket alkalmazzuk:

1. kellő számú független, adott eloszlású mintahalmazt generálunk;
2. a generált mintahalmaz alapján – a rendszer vagy folyamat (alap vagy mag) matematikai modelljének felhasználásával – határozzuk meg a rendszer lehetséges válaszait;
3. a kapott válaszártékek statisztikai, valószínűségi elemzésével meghatározzuk a rendszer kimenő jellemzőinek várható valószínűségi eloszlásait.

Ezt szemlélteti a 3. ábra.



3. ábra
A Monte Carlo-szimuláció [a szerző]

A vizsgált rendszer bemenő jellemzőinek értékeit a mérési eredmények statisztikai kiértékelései alapján generáljuk. Ehhez a leginkább ismert eljárások:

- a) inverz eloszlásfüggvény módszer;
- b) direkt transzformációs módszer;
- c) dob-elvet (*hit and miss*) módszer.

Valószínűségi mintahalmazok generálása során mérnöki szempontból fontos figyelembe vennünk a valószínűségi eloszlásfüggvények egyik általános „hibáját”, azt, hogy értelmezési tartományuk a két végtelen érték között található. Mivel ez nem teszi lehetővé a műszaki gyakorlatban előforduló, reális – adott intervallumon belüli (például, hogy egy esemény bekövetkezési valószínűsége értékének a $[0;1]$ intervallumon belül kell lennie) – értékek vizsgálatát.

A műszaki gyakorlatban alkalmazott Monte Carlo-módszer előnye, hogy nincs szükség a sokszor igen bonyolult analitikus, esetleg numerikus módszerekkel történő modellmegoldásra, hanem „csupán” véletlen számok generálásával válaszolhatók meg a feltett szakmai kérdések. A modellgenerálást kellő számban elvégezve, a kapott eredményeket elemezve megbecsülhetjük – és adott szakmai szempontból értékelhetjük – a várható rendszerválaszok valószínűségi eloszlásait.

5. Esettanulmány

Esettanulmányunkban az 1. ábrán látható hibafát elemezzük. A 2. táblázatban megadott kiinduló adatokat vettük fel, úgy, hogy a szórásaik a várható értékek egy századszorosai. (Ez utóbbi feltételezést a későbbi összehasonlító elemzési szempontok tették szükségessé.)

A következő lépésben a „kellő számú mintahalmazt” generálva futtatjuk le a magmodellt és rögzítjük a futási eredményeket. Ekkor a legkényesebb kérdés a „kellő szám” meghatározása. Ezt szakmai szempontból döntően befolyásolja a szimulációs elemzéssel szemben elvárt pontosság.

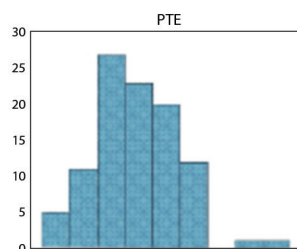
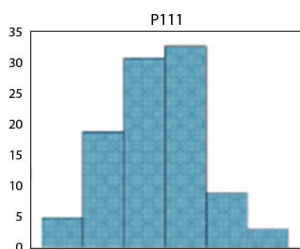
Vizsgálatunkban a „relatív 0,01” pontosságot választottuk, amit úgy értelmeztünk, hogy a fokozatosan növekvő gerjesztéssel végzett szimuláció közti legnagyobb relatív eltérés kisebb legyen, mint 10^{-2} . A korrelációs együtthatók csak -1 és $+1$ közötti értékkel bírhatnak, így – a szakmai tapasztalatok alapján is – prognosztizálható nagyságrendjük 10^{-1} . Ezért, a kívánt relatív pontosság ismeretében a gerjesztések számát addig célszerű növelni, amíg a legnagyobb eltérés, az egymást követő korrelációs mátrixok azonos elemei közti relatív eltérés kisebb, mint 10^{-3} .

A 4. ábra szemlélteti, hogy a gerjesztésszám növekedésével a felhasznált eredmények és a szimuláció eredményei egyre jobban közelítik a feltételezett valószínűségi eloszlásokat. Példaképpen az 5. ábra a 111 elemi és a fő esemény bekövetkezési valószínűségei közti korrelációs együttható változását, a 6. ábra pedig a legnagyobb relatív eltéréseket szemlélteti a gerjesztésszám függvényében. A diagramból látható, hogy a szimuláció kezdetekor meghatározott pontossági követelmény az 1 000 000-s gerjesztésszám esetén teljesült.

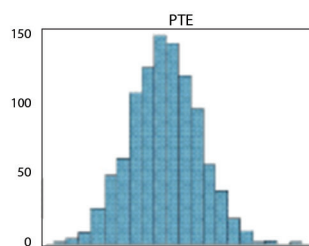
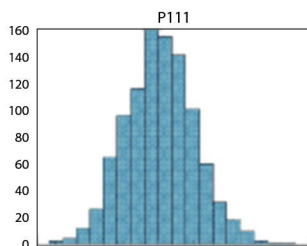
6. Következtetések

A Monte Carlo-szimuláción alapuló korrelációs elemzés, valamint lineáris hibafa érzékenységi modell [10], [11] eredményeinek megbízhatósági mérnöki szempontból történő értékelésével a következő következtetések vonhatók le:

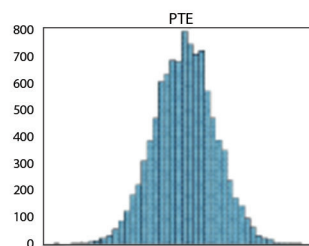
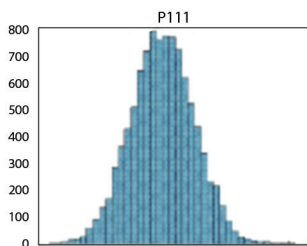
1. A magmodell nemlineáris – lásd a (1)–(5) egyenleteket és a 2. ábrát.
2. A Monte Carlo-szimuláción alapuló korrelációs és lineáris hibafa érzékenységi modell módszer eredményei hasonlóak, lásd 7. ábra.



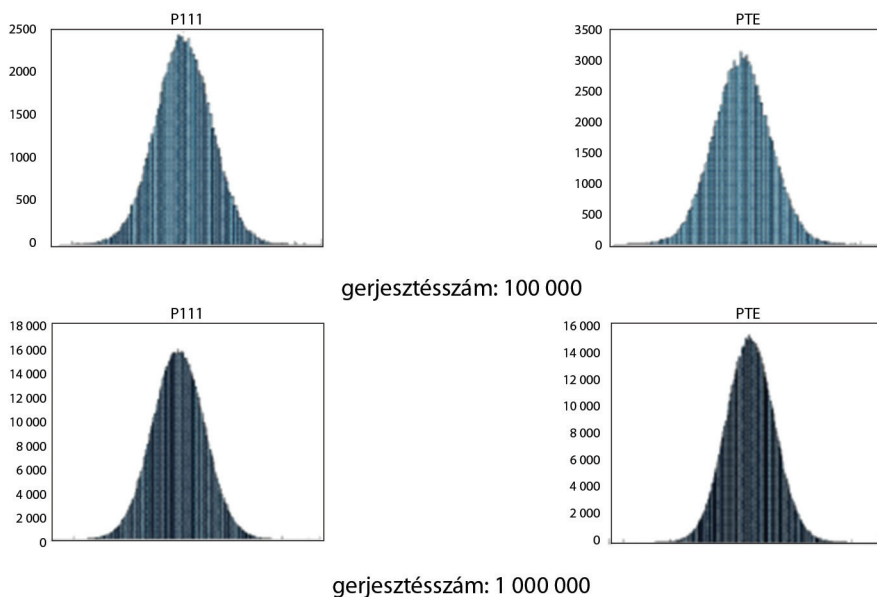
gerjesztésszám: 100



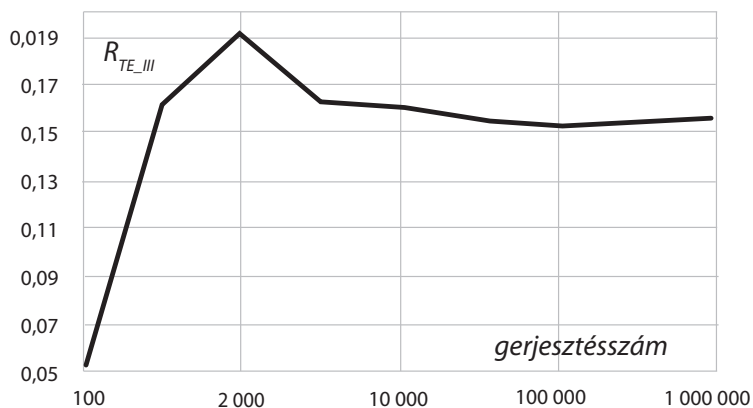
gerjesztésszám: 1000



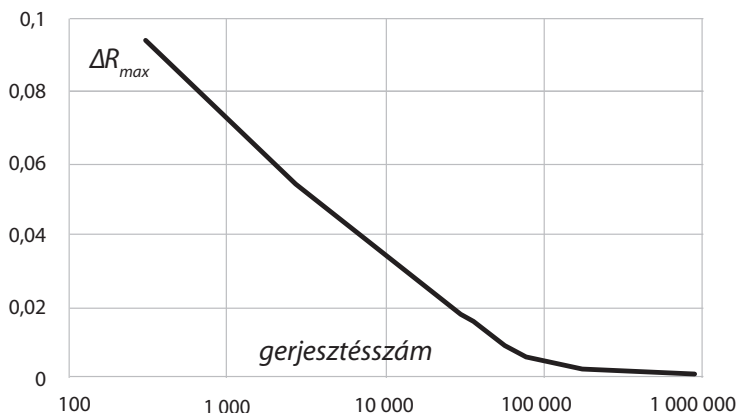
gerjesztésszám: 10 000



4. ábra
A 111 elemi és a fő esemény hisztogramjai különböző gerjesztésszámok esetén [a szerző]



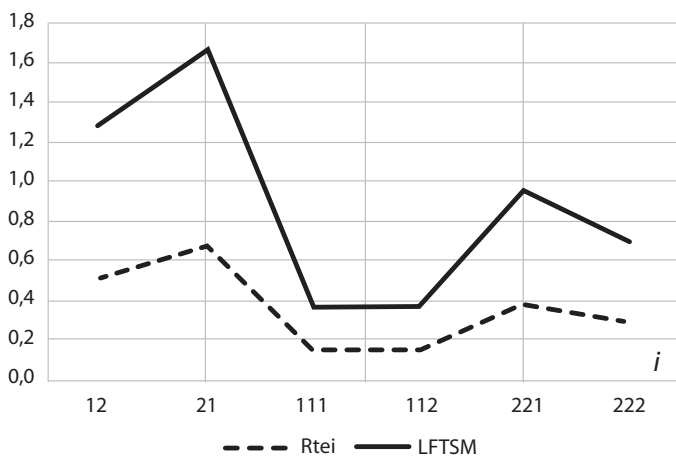
5. ábra
A 111 elemi és a fő esemény bekövetkezési valószínűségei közti korrelációs együttható változása a gerjesztésszám függvényében [a szerző]



6. ábra

Az egymás követő korrelációs együtthatók közti ΔR_{max} maximális relatív különbségek változása a gerjesztésszám függvényében [a szerző]

A fő esemény valószínűségérzékenységek sorrendje és aránya megegyezik a 7. ábra szerint.



7. ábra

A Monte Carlo-szimuláción alapuló korrelációs módszer és a lineáris hibafa érzékenységi modell eredményeinek összehasonlítása [a szerző]

A fent említett hasonlóságok ellenére a korrelációalapú és a lineáris érzékenységi módszerek eredményei numerikusan (nagyságrendben) eltérnek egymástól.

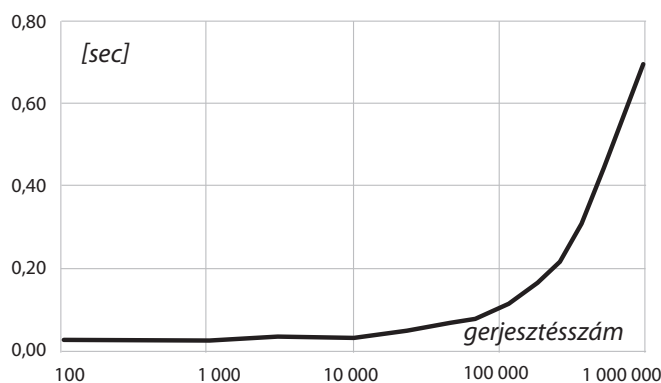
Egyrészt a lineáris érzékenységi módszer linearizálja az eredetileg nemlineáris alapmodellt (lásd a 2. ábrát), ezért numerikus bizonytalanságokhoz vezethet. A Monte Carlo-szimuláción alapuló korrelációs módszer képes kezelni ezeket a nemlineáris problémákat, így pontosabb

eredményt ad. Másrészt a lineáris érzékenységi elemzés során az elemi események valószínűségeinek változását „egyenként” modellezik.

A Monte Carlo-szimulációs érzékenységi elemzés hátránya, hogy jelentősen nagyobb számítási és számítógépes memóriakapacitást igényel.

Ezt szemlélteti a 8. ábra. Igaz, a szimuláció futási ideje eléggé kicsi. Egyrészt, ne felejtjük, hogy az elemzett hibafa a gyakorlati mérnöki feladatoknál jóval kisebb. Másrészt ez az egyszerű példa is jól szemlélteti, hogy a Monte Carlo-szimuláció lefuttatásának ideje (és így a szükséges számítási kapacitás és memóriaigény) exponenciális jelleggel növekszik a pontosabb eredményt adó nagyobb gerjesztésszámok esetén.

A Monte Carlo-szimuláció eredményei felhasználhatók a technikai rendszerek megbízhatóságának más szempontokból történő vizsgálatára is. Például a szükséges pótalkatrészek számának becslésére és a meghibásodások számának meghatározására, a szükséges becslési bizonytalanság (a megengedett pótalkatrészhiány valószínűsége) függvényében.



8. ábra

Az egymást követő korrelációs együtthatók közti maximális különbség változása a gerjesztésszám függvényében [a szerző]

7. Összefoglalás

A modern gépészetben számos nemkomplex kapcsolatú rendszer található. Az ilyen típusú berendezések megbízhatóságát hibafaelemzéssel lehet modellezni. Ez a tanulmány egy korrelációalapú módszert javasol, amely alkalmazható a valószínűségi hibafaelemzés műszaki megbízhatósági szempontú vizsgálatára.

A javasolt szimuláció eredményeinek műszaki megbízhatósági értékelése alapján fontos következtetéseket lehet levonni a vizsgált rendszer megbízhatóságával kapcsolatban.

A szerző ezen alkalmazott matematikai és műszaki megbízhatósági területekhez kapcsolódó, jövőbeli tudományos kutatásai között szerepel új matematikai modellezési módszerek kidolgozása, amelyek segítenek a műszaki vezetés döntéseiben a műszaki rendszerek megbízhatóságának növelése érdekében.

Felhasznált irodalom

- [1] I. N. Bronstejn, *Matematikai kézikönyv*. Budapest, Typotext, 2005.
- [2] *IEC 1025 Fault Tree Analysis (FTA)*. Genf, International Electrotechnical Commission, 1990.
- [3] M. H. Kalos, P. A. Whitlock, *Monte Carlo Methods*. Wiley VCH, 2008. Online: <https://doi.org/10.1002/9783527626212>
- [4] G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Courier Corporation, 2000.
- [5] E. Labašová, „Reliability Assessment of the Systems with Simple Interconnections,” *Research Papers Faculty of Materials Science and Technology Slovak University of Technology*, 29. évf. 49. sz. pp. 36–42. 2021. Online: <https://doi.org/10.2478/rput-2021-0022>
- [6] N. Metropolis, S. Ulam, „The Monte Carlo Method,” *Journal of the American Statistical Association*, 44. évf. 247. sz. pp. 335–341. 1949. Online: <https://doi.org/10.1080/01621459.1949.10483310>
- [7] *MSZ EN 1050, Gépek biztonsága – A kockázattértékelés elvei*. Budapest, Magyar Szabványügyi Testület, 1999.
- [8] M. E. J., Newman, G. T., Barkema, *Monte-Carlo Methods in Statistical Physics*. New York, Oxford University Press, 1999, p. 475. Online: <https://doi.org/10.1093/oso/9780198517962.001.0001>
- [9] L. Pokorádi, *Rendszerek és folyamatok modellezése*. Debrecen, Campus, 2008.
- [10] L. Pokorádi, „Mátrixalgebrai Hibafa-érzékenységelemzés,” *Multidiszciplináris Tudományok*, 103–110. 2011. Online: <https://ojs.uni-miskolc.hu/index.php/multi/article/view/68/66>
- [11] L. Pokorádi, Sensitivity Investigation of Fault Tree Analysis With Matrix-Algebraic Method, *Theory and Applications of Mathematics & Computer Science*, 1. sz. pp. 34–44. 2011.
- [12] E. Zio, *The Monte Carlo Simulation Method for System Reliability and Risk Analysis*. Springer, 2013. Online: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4471-4588-2>

Correlation-based Sensitivity Analysis of Fault Tree

The Fault Tree Analysis (FTA) is a systematic, top-down logical and diagrammatic risk assessment tool, which shows the causal relations leading to a given undesired event, so-called Top Event (TE). The events that cannot be further developed are the Basic Events (BEs). Probabilistic Fault Tree Analysis (PFTA) is a quantitative analysis method used to calculate the probability of TE depending on probabilities of BEs. Analysing the correlation coefficients between the reliabilities of TE and BEs is effective in selecting the critical elements that have the greatest impact on system reliability. The aim of the study is, on the one hand, to develop a correlation-based method for examining the sensitivity of probabilistic fault tree analysis. On the other hand, to compare the sensitivity results obtained in this way with the results of the Linear Fault Tree Sensitivity Model developed by the Author earlier.

Keywords: reliability, risk assessment, Fault Tree Analysis, correlation, sensitivity analysis

Pokorádi László, CSc
professor emeritus
Óbudai Egyetem
Mechatronikai és Járműtechnikai Intézet

pokoradi.laszlo@bgk.uni-obuda.hu
orcid.org/0000-0003-2857-1887

László Pokorádi, CSc
Professor Emeritus
Óbuda University
Institute of Mechatronics and Vehicle
Engineering

pokoradi.laszlo@bgk.uni-obuda.hu
orcid.org/0000-0003-2857-1887
