

Pokorádi László<sup>1</sup>

## ÜZEMELTETÉSI FOLYAMAT GRÁFMODELLEZÉSE<sup>2</sup>

*Technikai eszközök üzemeltetési rendszerei, folyamatai matematikai szempontból irányított gráfokkal írhatóak le. A műszaki tudományokban a hálózatokat, gráfokat elsősorban integrált, összetett rendszerek, folyamatok modellezésére használják, amelyekben az elemek közötti kapcsolatok feltárása, az állapotok és állapotváltozások vizsgálata a cél. A tanulmány azt szemlélteti, hogy hogyan értelmezhető egy üzemeltetési folyamat reguláris és valós gráffja, mint az üzemeltetés szubjektív, illetve objektív összetevője, valamint azt, hogy melyek az üzemeltetési hálózat éleinek, szögpontjainak gyakorlati jelentése.*

### GRAPH-MODELING OF OPERATION PROCESSES

*From mathematical point of view the operational processes of technical systems can be described as directed graphs. In the technical sciences the graphs are used to model integrated and complicated systems when the aim is investigation of interconnections between system elements, states and changes of states of processes. The paper shows interpretations of regular and concrete graph of operation as its subjective and objective component and practical meanings of nodes and edges of operational networks.*

## 1. BEVEZETÉS

Tágabb értelemben véve a technikai eszközök üzemeltetése az eszközökkel gyártásuk és kiseljezésük között történtek összessége, ami magában foglalja az eszközök használatát, karbantartását, javítását. Az üzemeltetési folyamat üzemvitelből, üzemállapotokból, és a közöttük fennálló kapcsolatokból épül fel [8]. Az üzemvitelt a technikai eszköz üzemeltetési állapotainak időbeni sorrendisége alkotja, amely egy adott üzemeltetési rendszerben előírásokkal előre szabályozott. Ezért ezt az üzemeltetési folyamat szubjektív összetevőjének is szokás nevezni. A technikai rendszer üzemeltetése során sokféle, bonyolult hatásokat kiváltó és gyakran egyszerű módszerekkel nem vizsgálható, sztochasztikus jellegű üzemeltetési körülmények hatnak. Ennek következtében a technikai állapota folyamatosan és halmozottan változik. Ezt szokás az üzemeltetési folyamat objektív összetevőjének nevezni [8].

Egy üzemeltetési rendszer vizsgálatának egyik első fontos állomása az üzemeltetési állapotok közti kapcsolatok tényének feltárása és gráffal történő matematikai leírása. A diszkrét állapotterű folyamatok ábrázolása, leírása, a lehetséges állapotok, és az állapot-váltások alkotta gráfok segítségével történhet. Ilyen példák az [5], [6] és [8] irodalomban találhatóak.

A gráf olyan alakzat, amely pontokból és bizonyos pontpárokat összekötő (nem feltétlenül egyenes) vonaldarabokból áll. Matematikai megfogalmazásban a  $G(P;E;f)$  gráfon olyan alakzatot értünk, amely a  $P$  pontokból és bizonyos pontokat összekötő  $E$  vonaldarabokból áll. A  $P$

<sup>1</sup> egyetemi tanár, Óbudai Egyetem, pokoradi.laszlo@bkg.uni-obuda.hu

<sup>2</sup> Lektorálta: Dr. Békési Bertold alezredes, egyetemi docens, PhD, katonai műszaki tudományok, Nemzeti Közszolgálati Egyetem Hadtudományi és Honvédtisztképző Kar Katonai Üzemeltető Intézet Katonai Repülő Tan-szék, bekesi.bertold@uni-nke.hu

halmaz elemeit pontoknak (esetleg gráf szögpontjainak vagy csúcsainak), az  $E$  halmaz elemeit pedig a gráf éleinek nevezzük [3]. A fenti jelölésben szereplő  $f$  függvény az  $E$  halmazt képezi le a  $P \times P$ -re, azaz bármely  $e$  élhez hozzárendel egy pontpárt a  $P$  halmaz elemei közül. Ezért az  $f$  függvényt szokás illeszkedési leképezésnek is nevezni. Irányított gráfról akkor beszélünk, ha az élek végpontjainak sorrendjére is tekintettel vagyunk [4], [7].

A technikai eszközök üzemeltetésének elméleti alapjait Rohács és Simon fektették le [8] könyvükben. Pokorádi a technikai rendelkezésre állás becslésére alkalmazta a Markov-folyamatok elméletét [6].

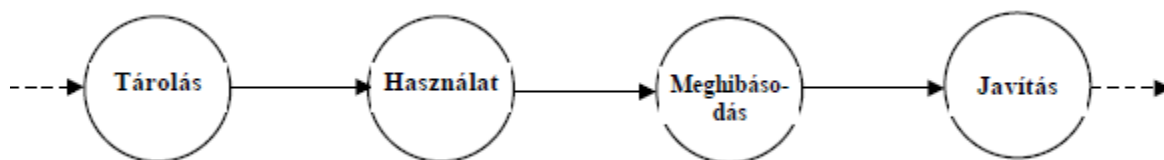
A gráfelméletnek és mérnöki alkalmazásának kiterjedt matematikai és műszaki szakirodalma található. A technikai folyamatok leírásához szükséges gráfelméleti alapismeretek olvashatóak a két Korn [3], illetve Pokorádi [5] könyvében. Alkalmazásukra láthatunk példákat a [4] és [7] publikációkban. Csiszér kutatásainak célja a hálózat kutatás minőségügyi felhasználási lehetőségeinek feltárása, főleg a folyamatfejlesztési szempontokat helyezve az elemzések középpontjába [1], [2].

A tanulmány célja – a fenti irodalmakra támaszkodva – bemutatni az üzemeltetési folyamatok és rendszerek hálózati leírásának módjait, valamint szemléltetni azt, hogy hogyan oldható meg a rendelkezésre állás és karbantartási költség becslése megváltozott üzemeltetési körülmény esetén.

A cikk az alábbi fejezetekből áll: A 2. fejezet bemutatja a karbantartási folyamatok leírasi módjait. A 3. fejezet egy esettanulmányt mutat be. Végezetül a Szerző összegzi munkáját és megfogalmazza a jövőbeni kutatási terveit.

## 2. ÜZEMELTETÉSI FOLYAMAT HÁLÓZATI LEÍRÁSA

Egy technikai eszköz üzemeltetése az eszközzel a gyártása és a kiselejtezése között történtek összessége. Ide tartozik az eszköz rendeltetésének megfelelő használata, karbantartása, javítása és ezen állapotok bármelyikére történő várakozása. Ezeket a létezési formákat nevezzük üzemeltetési állapotoknak. Más megfogalmazásban az üzemeltetési állapotok – megfelelő definiálásuk esetén – jól körülhatárolt, egymástól jól elválasztott állapotokat jelentenek, melyek más, például jogi szempontokat is jelenthetnek. Az üzemeltetési folyamat üzemeltetési állapotok időben és gyakoriságban véletlen egymásutániságának tekinthető. Ezen egymásutániságot úgynevezett üzemeltetési láncsal tudjuk szemléltetni.



1. ábra Üzemeltetési gráf (példa)

Az üzemeltetési lánc egy olyan speciális irányított gráf, ahol az üzemeltetési állapotokat szemléltető szögpontok mindegyikébe egy és csak egy (állapotváltozási) él fut be, valamint egy, és csak egy él indul ki belőle, mint ahogyan ezt az 1. ábra is mutatja. Hátránya, hogy egy teljes esz-

közpark rendszerszemléletű vizsgálata során az összes berendezés, rendszer üzemeltetési lánccának ábrázolása nagyon körülményes [8].

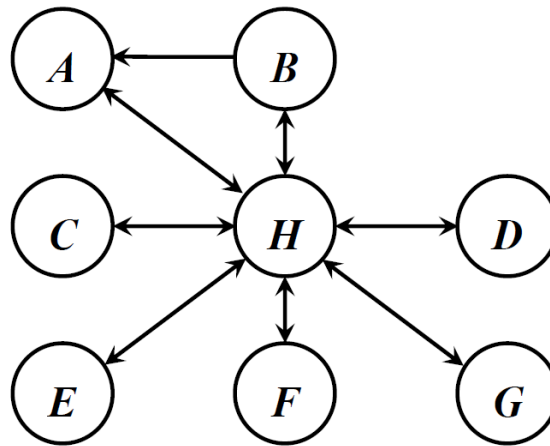
Rendszerszemléletű elemzés esetén az üzemeltetési rendszer, illetve folyamat az üzemeltetési állapotok és állapotváltozások alkotta, hálózati struktúrájú rendszernek tekinthető. Ezért bevezetjük az üzemeltetési hálózat fogalmát. Az üzemeltetési hálózat szögpontjai az üzemeltetési állapotokat, élei pedig a lehetséges állapotváltozásokat szemléltetik (2. ábra).

A műszaki tudományokban a hálózatokat, gráfokat elsősorban integrált, összetett rendszerek, folyamatok modellezésére alkalmazzák, amikor az elemek közötti kapcsolatok feltárása, az állapotok és állapotváltozások vizsgálata a cél. A hálózatok csoportosításánál a hálózati elemekből, azaz az élekből és a csúcsokból, valamint a modellezett rendszer, folyamat fizikai jellemzőiből indulunk ki. Az élek és a csúcsok típusai határozzák meg az adott hálózat, valamint az azt szemléltető gráf típusát, a fizikai jellemzők pedig a rendszer, folyamat műszaki tulajdonságait jellemzik [5].

A hálózatokat egyrészt az élek jellemzői alapján csoportosíthatjuk. E szerint létezik áramlási, attribútum és preferencia típusú élek által összetartott hálózat, melyeket áramlási, attribútum vagy preferencia hálózatoknak nevezünk [1]. Az áramlási hálózatok jellemzői, hogy a csúcsok között anyag-, energia-, vagy információáramlás történik, azaz valós fizikai folyamatok játszódnak le [2]. Az üzemeltetési folyamat áramlási hálózatként kezelhető, ahol az „áramló anyag” az üzemeltetett technikai rendszer, ami a különböző üzemeltetési állapotok között – időben és gyakoriságban véletlenszerűen – „mozog”.

A másik felosztási mód a csúcsok típusa szerinti csoportosítás [1]. Ebben az esetben beszélhetünk esemény-, erőforrás- és fogalom-típusú csúcsok alkotta hálózatokról. Az eseményhálózatokban, például folyamatok, tevékenységek zajlanak, jelenségek játszódnak le a csúcsokban. Az erőforrás-hálózatokban például gépek, berendezések és munkavégzők, felhasználók alkotják a csúcsokat. A fogalomhálózatokban például az erőforrások által birtokolt kompetenciák és az általuk betöltött szerepek jelennek meg. Rendszertani szempontból elemi folyamatlépésnek tekintjük azt a feladatot, amelyet egy erőforrás, folyamatos munkavégzéssel, egy technikai eszközzel „elvégez” úgy, hogy annak legalább egy output-ja van.

Az üzemeltetés esemény hálózatként modellezhető, melynek során az elemi események az üzemeltetési állapotok, például a különböző típusú és mértékű meghibásodások, illetve javítási, karbantartási munkák.



2. ábra A vizsgált üzemeltetési folyamat reguláris üzemeltetése hálózata  
*H* – rendeltetésszerű használat; *A-G* – különböző típusú meghibásodások javítása

Két fajta esemény hálózatot különböztetünk meg: reguláris és valós [1]. Reguláris hálózat szabályozásban meghatározott elemi folyamatlépéseket tartalmaz. Ezzel szemben egy valós folyamat a ténylegesen bekövetkező, végrehajtott elemi folyamatokból áll. A két folyamathálózat összehasonlítása megmutatja, hogy a valós működés mekkora mértékben és milyen módon tér el a szabályozott módtól. (Erre látunk példát a 2. és 3. ábrák összehasonlításával.)

Üzemeltetési hálózat, gráf esetén az élekhez rendelhető legáltalánosabb fizikai jellemzők az állapotváltási valószínűségek (például meghibásodási ráták, vagy javítási intenzitások). A szögpontokhoz rendelhető fizikai jellemzők lehetnek az állapotokban tartózkodás anyagi vonzata (javítási költség vagy termelt nyereség), munka- és/vagy anyagigényei.

Könnyen belátható, hogy minél több elemű a modellvizsgálathoz alkalmazott hálózat, annál pontosabb, árnyaltabb képet tudunk kapni a vizsgálandó üzemeltetési folyamatról, rendszerről, ugyanakkor annál erőforrás-igényesebb az lesz elemzés. Ha viszont csökkentjük a hálózati elemek számát, könnyebben megoldható modellel lehet dolgozni, de az így kapott eredmények részletessége, és így felhasználhatósága jelentősen csökkenhet. Ezért fontos kérdés a vizsgálati háló mérete (a gráf szögpontjainak száma) optimumának meghatározása.

### 3. ESETTANULMÁNY

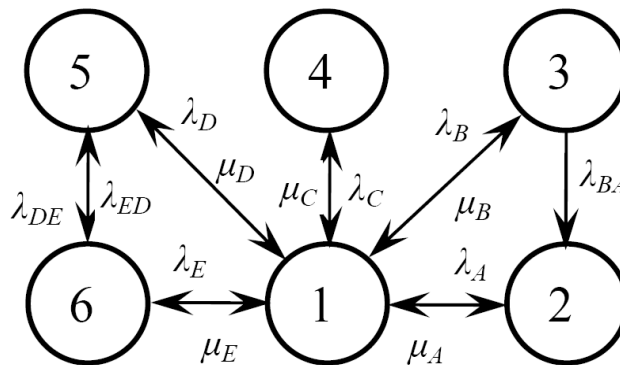
Jelen fejezetben az előzőekben elméleti oldalról bemutatottak alkalmazási lehetőségét szemléltetjük egy üzemeltetési mintapéldán keresztül. A mintapélda jól mutatja be, hogyan értelmezhető egy üzemeltetési folyamat reguláris és valós gráfja, mint az üzemeltetés szubjektív, illetve objektív összetevője, valamint azt, hogy melyek az üzemeltetési hálózat éleinek, szögpontjainak gyakorlati jelentése.

Egy technikai rendszer tervezésekor – a korábbi hasonló szerkezetű és feladatú eszközök üzemeltetési tapasztalatai alapján – hét különböző jelentős meghibásodás várhatóságát prognosztizálták a tervezők. Az eszköz működési sajátosságaiból következően azzal is számoltak, hogy *B* típusú hiba javítása közben gyakran előfordulhat, hogy az *A* típusú hiba javítása is célszerűvé válhat, így ekkor egy közös javítás lehetőségét is meghatározták. Ezt szemlélteti a 2. ábrán az

**A** és **B** szögpontok közti, **B**-ből **A**-ba irányított él. A fentiek alapján elkészítették az adott berendezés üzemeltetésének reguláris hálózatát (2. ábra), amit alkalmazva prognosztizálták a várható karbantartási, javítási költség-, és munkaigényt.

Az eszköz rendszerbeállítása és bejáratási szakasza után, egy adott, az előző berendezések alkalmazásától eltérő, üzemeltetési körülmények között csak az **A**; **B**; **D** és **E** típusú meghibásodások okozták a rendszer leállásainak 94 %-át. Sőt, az **A** és **B** típusú meghibásodásokhoz hasonló (de „oda-vissza”) jelenségeket tapasztaltak a **D** és az **E** típusú meghibásodások javítása során. Ez szükségessé tette a karbantartási, javítási költség-, és munkaigények újrabecslését. A modell egyszerűsítése érdekében a **C**; **F** és **G** nem szignifikáns hatású meghibásodások javítását csak a **C** típusú meghibásodás javításaként volt célszerű kezelni. Ekkor a tervezettől eltérő üzemeltetési folyamathoz el kellett készíteni az üzemeltetés valós hálózatát (3. ábra). A meghibásodási adatok statisztikai elemzése kimutatta, hogy a meghibásodások bekövetkezési gyakoriságai jó közelítéssel exponenciális jellegű eloszlásokkal bírnak és a technikai eszközpark működési idejétől függetlenek tekinthetők. A meghibásodások és a javításaik főbb statisztikai adatait az 1. táblázat tartalmazza.

Úgynevezett beállt – a technikai eszközpark működési idejétől független – üzemeltetési, karbantartási folyamatokat stacioner diszkrét állapotterű, folytonos idejű Markov folyamattal tudjuk matematikailag modellezni [5], [6]. Beállt üzemeltetési folyamaton olyan folyamatot értünk, ahol a különféle állapotváltási – főleg a meghibásodási – valószínűségek időben nem (vagy csak elhanyagolható mértékben) változnak [8]. Ilyen üzemeltetési folyamatot tapasztalhatunk a bejáratási és a kiöregedési szakaszok között, ha nem lép fel jelentős változás az üzemeltetési körülményekben.



3. ábra A vizsgált üzemeltetési folyamat „valós” gráfmodellje  
**1** – rendeltetésszerű használat; **2** – **A** típusú meghibásodás javítása;  
**3** – **B** típusú meghibásodás javítása; **4** – **C** típusú meghibásodás(ok) javítása;  
**5** – **D** típusú meghibásodás javítása; **6** – **E** típusú meghibásodás javítása

| Meghibásodás                                      | A típusú             | B típusú             | C típusú             | D típusú             | E típusú             |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| MTBF $\tau$ [óra]                                 | 1316,3               | 892,8                | 1339,4               | 1410,1               | 1396,4               |
| Meghibásodási ráta $\lambda$ [óra <sup>-1</sup> ] | $7,60 \cdot 10^{-4}$ | $1,12 \cdot 10^{-3}$ | $7,47 \cdot 10^{-4}$ | $7,91 \cdot 10^{-4}$ | $7,61 \cdot 10^{-4}$ |
| Javítási átlagidő $\tau$ [óra]                    | 7,08                 | 9,63                 | 2,14                 | 8,21                 | 7,62                 |
| Javítási ráta $\mu$ [óra <sup>-1</sup> ]          | 0,141                | 0,104                | 0,467                | 0,122                | 0,131                |
| Átlagos javítási költség [€]                      | 150,2                | 115,4                | 98,7                 | 210,8                | 352,4                |
| Átlagos munkaigény [munkaóra]                     | 14,16                | 14,45                | 5,35                 | 24,63                | 17,5                 |
| $\lambda_{ij}$ [óra <sup>-1</sup> ]               | –                    | 0,427                | –                    | 0,613                | 0,524                |

1. táblázat Statisztikai elemzés főbb adatai

Az adatok elemzése alapján kijelenthető, hogy a folyamat Markov modellje felállítható, és azzal elemezhető. A hálózati modell felhasználásával a Kolmogorov-féle differenciál-egyenletrendszer – mely az állapotokban való tartózkodás valószínűségeinek időbeni változását írja le – az alábbi módon adható meg:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_1}{d\tau} &= m_{11}P_1 + m_{12}P_2 + m_{13}P_3 + m_{14}P_4 + m_{15}P_5 + m_{16}P_6 \\
 \frac{dP_2}{d\tau} &= m_{21}P_1 + m_{22}P_2 + m_{23}P_3 \\
 \frac{dP_3}{d\tau} &= m_{31}P_1 + m_{33}P_3 \\
 \frac{dP_4}{d\tau} &= m_{41}P_1 + m_{44}P_4 \\
 \frac{dP_5}{d\tau} &= m_{51}P_1 + m_{55}P_5 + m_{56}P_6 \\
 \frac{dP_6}{d\tau} &= m_{61}P_1 + m_{65}P_5 + m_{66}P_6
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

ahol  $m_{ij}$  – az állapotváltási intenzitások, melynek értékeit a 2. táblázat tartalmazza.

Mivel az általunk vizsgált folyamatot beálltnak, azaz időben változatlanoknak tekintjük, így az állapotokban való tartózkodási valószínűségek időszerinti deriváltjaira teljesül, hogy:

$$\frac{dP_1}{d\tau} = \frac{dP_2}{d\tau} = \frac{dP_3}{d\tau} = \frac{dP_4}{d\tau} = \frac{dP_5}{d\tau} = \frac{dP_6}{d\tau} = 0
 \tag{2}$$

Az egyenletrendszer megoldásakor problémaként jelentkezhet, hogy a triviális megoldást kapjuk meg. Ezért a megoldáshoz a

$$\sum_{i=1}^6 P_i(\tau) = 1
 \tag{3}$$

további feltételt is be kell vezetnünk, amely azt fejezi ki, hogy az üzemeltetés tárgya csak a fenti hat állapot (melyek esetünkben a teljes eseményteret alkotják) valamelyikében tartózkodhat.

|   |                         |
|---|-------------------------|
| $m_{11} = -(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E)$ | $m_{12} = \mu_A$        |
| $m_{13} = \mu_B$  | $m_{14} = \mu_C$        |
| $m_{15} = \mu_D$  | $m_{16} = \mu_E$        |
| $m_{21} = \lambda_A$  | $m_{22} = -\mu_A$       |
| $m_{23} = \lambda_{BA}$   | $m_{31} = \lambda_B$    |
| $m_{33} = -(\mu_B + \lambda_{BA})$                                      | $m_{41} = \lambda_C$    |
| $m_{44} = -\mu_C$   | $m_{51} = \lambda_D$    |
| $m_{55} = -(\mu_D + \lambda_{DE})$                                      | $m_{56} = \lambda_{ED}$ |
| $m_{61} = \lambda_E$  | $m_{65} = \lambda_{DE}$ |
| $m_{66} = -(\mu_E + \lambda_{ED})$                                      |                         |

2. táblázat Állapotváltási sűrűségek

A (1); (2) és (3) egyenletek alkotta egyenletrendszer 1. táblázat értékeinek felhasználásával történő megoldása az alábbi állapotokban való tartózkodási valószínűségeket jelenti:

$$P_1 = 0,973994 ; \quad P_2 = 0,011453 ;$$

$$P_3 = 0,002054 ; \quad P_4 = 0,001556 ;$$

$$P_5 = 0,005101 ; \quad P_6 = 0,005844 .$$

A fenti eredmény alapján elsősorban ki tudjuk jelenteni, hogy a berendezés esetén 97,4 %-os készenlélet tudunk biztosítani a jelenlegi karbantartási rendszerrel. Mivel ismert a javítási költségek, illetve a javítási munkaigények, így prognosztizálhatjuk, egy adott  $T$  vizsgálati idő alatti  $K_\Sigma$  javítási költséget, illetve  $M_\Sigma$  munkaigényt. Ez az alábbi összefüggések segítségével oldható meg:

$$K_\Sigma = T \sum_{i=2}^4 \frac{k_i P_i}{\tau_i} \quad (4)$$

illetve

$$M_\Sigma = T \sum_{i=2}^4 \frac{m_i P_i}{\tau_i} \quad (5)$$

ahol:  $k_i$  –  $i$ -edik javítás költsége;  $m_i$  –  $i$ -edik javítás munkaigénye.

Példánk esetén 10 000 órával számolva a javítási költség: *51996,0 Euro, illetve a munkaigény: 4252,43 munkaóra.*

## 4. ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány az üzemeltetési folyamatok gráfelméleti, hálózatelméleti modellezéséről és a modellalkalmazási lehetőségeit mutatta be, elméleti és gyakorlati szempontból. A Szerző jövőbeli kutatásainak célja a komplex rendszerek és hálózatok kutatási eredményeinek adaptálása a technikai rendszerek üzemeltetési folyamatainak és üzemeltetési rendszereinek elemzésére.

---

**FELHASZNÁLT IRODALOM**

- [1] CSISZÉR TAMÁS, A hálózat kutatás alkalmazása a folyamat alapú minőségfejlesztésben, Minőség és megbízhatóság, 2011/5, pp. 274-282.
- [2] CSISZÉR TAMÁS, A kockázati események közötti összefüggések vizsgálata hálózatelemzése, Magyar Minőség 2011/11, pp. 59-61.
- [3] KORN, G.A. - KORN, T.M, Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, Courier Dover Publications, 1975.
- [4] POKORÁDI LÁSZLÓ, Rendszerek és folyamatok gráfelméleti vizsgálata, Tudományos Kiképzési Közlemények, MH. SzRTF, Szolnok 1993/2-3, p. 33-44
- [5] POKORÁDI LÁSZLÓ, Rendszerek és folyamatok modellezése, Debrecen: Campus Kiadó, 2008
- [6] POKORÁDI LÁSZLÓ, Availability Assessment Based on Stochastic Maintenance Process Modeling, Debreceni Műszaki Közlemények, 2013/1 p. 37-46.
- [7] POKORÁDI LÁSZLÓ, Rendszerek gráfmodellezése. GÉP LIX. 8) pp. 59-62. (2008)
- [8] ROHÁCS JÓZSEF - SIMON ISTVÁN Repülőgépek üzemeltetési zsebkönyve. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1989.