

Stein Vera, Pokorádi László

## FŐÁRAMKÖRŰ EGYENÁRAMÚ MOTOR MÉRÉSI BIZONYTALANSÁGÁNAK ELEMZÉSE

*A mérnöki mérések és számítások során parametrikus bizonytalanságot tapasztalunk, mely megfelelő matematikai módszerekkel modellezhető és leírható. A villamos gépek méréseinek fő célja azok jelleggörbéinek megfelelő pontosságú meghatározása. A tanulmány a parametrikus modellbizonytalanságot egy fő forrását mutatja be és szemlélteti azt a főáramkörű egyenáramú motor jelleggörbe meghatározásának példáján keresztül, hallgatói mérési csoportok eredményeinek segítségével.*

**Kulcsszavak:** villamos gépek, jelleggörbe, mérés, modellbizonytalanság, parametrikus bizonytalanság

### BEVEZETÉS

Egy matematikai modell felállításakor, illetve a kapott eredmények elemzésekor mindig számolnunk kell valamilyen típusú, valamint mértékű bizonytalansággal. Ennek oka részben az, hogy ismereteink sosem teljesek a modellezett rendszerrel kapcsolatban, illetve a rendelkezésre álló adataink is pontatlansággal bírnak. A mérnöki gyakorlatban fellépő úgynevezett modellbizonytalanság vizsgálata során, annak forrása alapján, megkülönböztetünk ismereti (angol néven: „epistemic”), és parametrikus („parameter uncertainty”) bizonytalanságot.

Az ismereti bizonytalanság szubjektív bizonytalansággként is szemlélhető. Ezek az okok magukba foglalhatják például a megfelelő szakmai információk, fizikai ismeretek hiányát, vagy téves ismeretét, melyek megakadályozhatják a helyes modell felállítását. Ezzel szemben a parametrikus bizonytalanság elsődlegesen az objektivitáshoz kapcsolható, és megfelelő módszerekkel modellezhető, feldolgozható.

Jelen tanulmányunk célja az alapvető parametrikus bizonytalanság forrásainak szemléltetése egy főáramkörű egyenáramú motor jelleggörbe meghatározásának példáján keresztül, hallgatói mérési csoportok eredményeinek segítségével.

A tanulmány az alábbi részekből áll: A 2. fejezetben mutatjuk be az elemzésünk tárgyát képező mérést. A 3. fejezet a parametrikus modell bizonytalanságot mutatja be és az elemzési módszereket írja le röviden. A 4. fejezet egy villamos motor jelleggörbe meghatározásának példáján keresztül szemlélteti az elemző eljárásokat. Végül, az 5. fejezet összegzi a tanulmány elkészítésekor szerzett tapasztalatokat.

### A MÉRÉS LEÍRÁSA

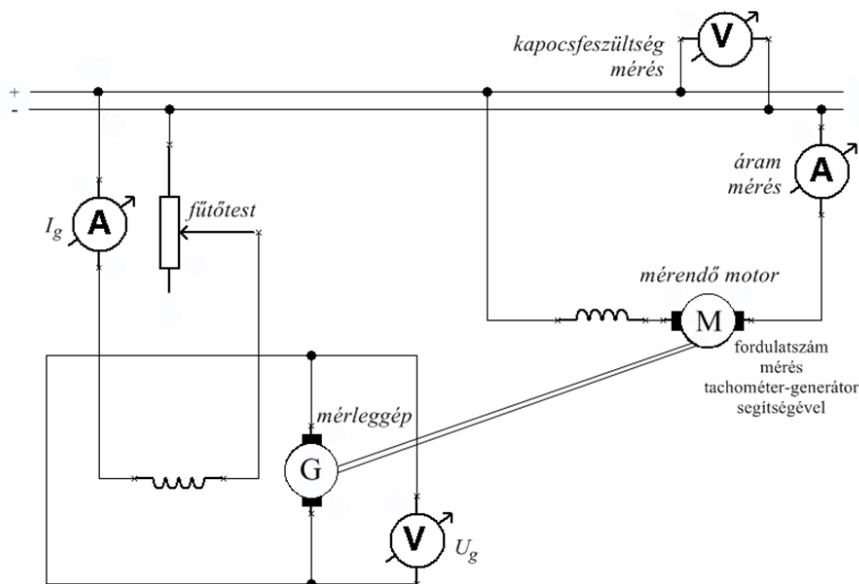
A főáramkörű egyenáramú motor mérésének célja a motor jelleggörbéjének meghatározásához szükséges fordulatszám-áramerősség, valamint nyomaték-áramerősség függvények meghatározása és diagramban való ábrázolása.

A mért motor (névleges adatai: 220 V; 3 kW; 1500 1/min) által leadott nyomatékot mérleggéppel (névleges adatai: 220 V; 3 kW; 1500 1/min) segítségével mérjük, melyet a mérendő géppel merev tengelykapcsoló köt össze.

A soros motor működési sajátosságait szem előtt tartva a motort csak terheléssel szabad indítani, így a mérleggépet terhelésként is hasznosítjuk. Ennek értelmében indítás előtt a mérleggépre változtatható ellenállású fogyasztót (fűtőtestet – névleges adatai: 250V; 250 W; 148  $\Omega$ ) kapcsolunk.

A mérleggép 0,36 m hosszú mérlegkarjaira helyezett – ismert nagyságú (1,29; 4,57; 5,86; 6,7; 7,08 kg tömegű) – súlyokkal a csapágyazott állórész elfordulása megakadályozható, így a kar egyensúlyi állapotában a soros motor nyomatéka a súly, és kar hosszának szorzataként adódik.

A fordulatszámot tachométer-generátor segítségével mérhetjük. A mérés az egyenáramú hálózatról táplált motor áram-, kapocsfeszültség-, fordulatszám értékeinek felvételéből áll a mérleggép különböző gerjesztő áram értékeinél. A mérés kapcsolási vázlatát az 1. ábra mutatja.



1. ábra A vizsgált mérés kapcsolási vázlata (saját ábra)

A mérleggép különböző gerjesztési értékeit a karjára helyezett súlyok változtatásával állítjuk be úgy, hogy a fűtőtestek ellenállásának szabályozásával a gerjesztő áramot a mérlegkar egyensúlyi állapotáig módosítjuk.

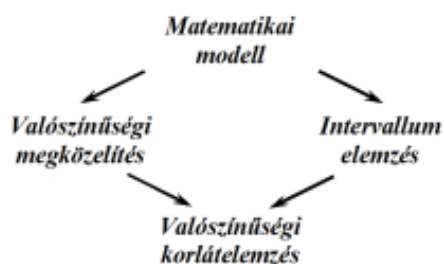
## A MODELLBIZONYTALANSÁGOK

Napjaink mérnöki gyakorlatában a matematikai modellezés fő feladata valós fizikai jelenségek folyamatok vagy rendszerek modelljeinek felállítása és a modellvizsgálati eredmények szakmai szempontú elemzése. A numerikus modelleket és paramétereket a modellezett rendszer természete és a megkívánt pontosságú vizsgálati, modellezési vagy szimulációs eredmény függvényében kell kiválasztanunk. A gerjesztések, valamint a belső jellemzők helyes feldolgozása biztosítja, hogy a rendszer valós tulajdonságai jól tükröződjenek az eredményekben. Ezért kritikus kérdés a megfelelő modell és a rendelkezésre álló adatok helyes feldolgozása. A mérnöki gyakorlatban a rendelkezésre álló információ halmaz gyakran nem kellően megbízható vagy pontos – inkább pontatlan, diffúz, fluktuáló, nem teljes, töredékes, megbízhatatlan, félreérthető.

Ezeket az információkat főleg tervek, tervrajzok, mérések, megfigyelések, tapasztalatok, szakértői ismeretek, és előírások alapján nyerhetjük. Ráadásul, ezeket az adatokat a gyártás, üzemeltetés során bekövetkező emberi tévedések, hibák, illetve a környezet paramétereinek sztochasztikus változásai is befolyásolják. A fenti jelenségeket egy általános kifejezéssel tudjuk összegezni, ez a bizonytalanság [3].

A bizonytalanság elválaszthatatlan egy modelltől, a gerjesztésektől és a modellparaméterektől. A bizonytalanság elemzés információt ad a kapott válaszok hibahatáraitól, a modell eredményeinek elfogadási szintjéről. A rendelkezésre álló információk bizonytalansága megakadályozhatja a helyes modell, valamint pontos adatok, felesleges információk nélküli meghatározását. „Az a jó modell, amely a lehető legegyszerűbb, de a célnak megfelelő pontossággal közelíti a valóságot.” [3]. Másképpen megfogalmazva: Az, és csak az a modell tekinthető jónak, amely a vizsgálat szempontjából fontos paramétereket, összefüggéseket és a peremfeltételeket megfelelő pontossággal figyelembe veszi, de mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolja, amelyeket a kitűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak.

A parametrikus bizonytalanság tudományos szintű elemzése alapvetően két eltérő módon oldható meg [2]. Ezeket szemlélteti az 2. ábra „második sora”.



2. ábra Bizonytalanságelemzési módszerek [2]

Az első mód a gerjesztések bizonytalansága következtében fellépő lehetséges rendszerválások meghatározása intervallum értékekkel. Ezen eljárási mód annak figyelembevétele, hogy néhány, vagy az összes független paraméter nem egy adott értékkel rendelkezik, hanem bizonyos intervallumon belül található. Általános megfogalmazásuk esetén az intervallumokhoz nem kapcsolunk valószínűségi eloszlásokat, csak a lényegi eredmények lehetséges jövőbeli szélső értékeit határozzuk meg.

A valószínűségi módszer a környezet gerjesztéseinek minden lehetséges eleméhez valamilyen valószínűségi eloszlást rendel. A lehetséges rendszerválásokhoz történő valószínűségek rendelése egy általánosan alkalmazott gyakorlat. Ilyenkor az sem ritka, hogy úgynevezett szubjektív valószínűségekkel találkozunk, ami szakértők (vagy bizonyos esetekben laikusok) által becsült valószínűségi értéket jelent.

Általában, ha az adatok valószínűségi eloszlásai ismertek, elméletileg mindegyik alternatíva következményeinek eloszlását megtudhatjuk. Ez egy egyszerű kritérium esetén a vizsgált rendszer vagy folyamat kvalitatív tulajdonságának valószínűségi eloszlását jelenti.

Például egy determinisztikus matematikai modell esetén, amikor a modell bemenő és belső jellemzői valamilyen bizonytalansággal bírnak a kalkuláció során használt valós értékű mennyiségekkel kapcsolatban, a bizonytalanságelemzés intervallumelemzéshez vezethet.

A valószínűségi módszerek egyik legelterjedtebb formája a Monte-Carlo-szimuláció, mellyel részletesebben Pokorádi és Molnár [4] publikációjukban foglalkoznak.

## ESETTANULMÁNY

Jelen tanulmányunkban a 2. fejezetben leírt mérésből csak a nyomaték-áramerősség függvény meghatározásával foglalkozunk a mérésekből származó modellbizonytalanság szemléltetése érdekében.

### Mérési eredmények

A méréseket 8 csoport végezte el, csoportonként 5–5 mérési ponttal. A nyomaték meghatározásának alapját képező – a mérlegkarra helyezett – súlyok tömegét, és a hozzájuk tartozó – leolvasott – gerjesztő áramerősségek értékeit az alábbi táblázat tartalmazza, mérőcsoportonkénti bontásban.

sz.	$I[A]$	$m[kg]$	sz.	$I[A]$	$m[kg]$	sz.	$I[A]$	$m[kg]$	sz.	$I[A]$	$m[kg]$
1	19,76	7,08	3	19,60	7,08	5	20,00	7,08	7	19,40	7,08
	19,00	6,7		19,00	6,7		19,00	6,7		18,20	6,7
	17,70	5,86		17,40	5,86		16,20	5,86		17,40	5,86
	14,90	4,57		14,80	4,57		14,80	4,57		14,80	4,57
	9,20	2,13		7,00	1,29		7,20	1,29		7,20	1,29
2	19,60	7,08	4	20,00	7,08	6	19,60	7,04	8	20,00	7,14
	19,00	6,7		19,00	6,7		18,20	6,23		19,00	6,76
	17,20	5,86		17,60	5,86		17,40	5,85		17,60	5,92
	14,60	4,57		14,80	4,57		14,60	4,57		14,80	4,63
	7,00	1,29		7,20	1,29		7,20	1,29		7,20	1,29

1. táblázat Mérési adatok

Az így nyert negyven mérési pontot, valamint a belőlük meghatározott másodfokú regressziós görbét a 3. ábra mutatja. A nyomatékot az

$$M = mgk \quad (1)$$

összefüggés segítségével határozták meg a mérések során, ahol:

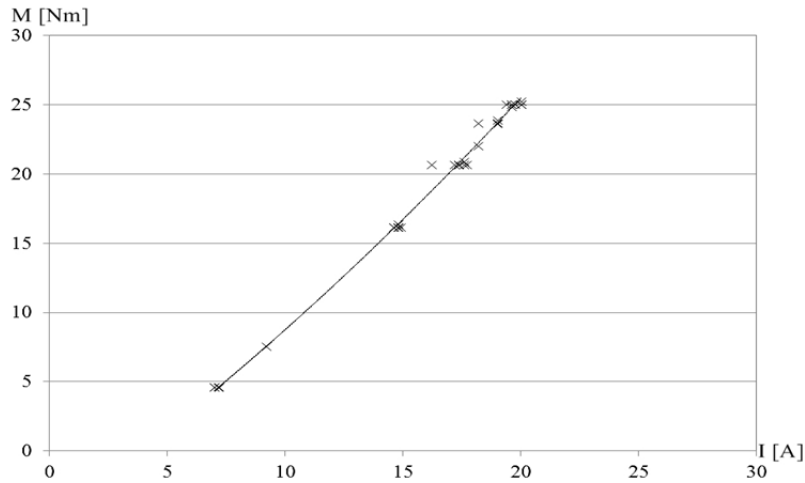
- $m$  – a terhelő súly tömege;
- $g$  – a nehézségi gyorsulás ( $9,81 \frac{m}{s^2}$ )
- $k$  – a mérlegkar hossza ( $0,36 m$ ).

A mérési eredményeket – a [1] és [5] tankönyvekben leírtak alapján – az

$$M = AI^2 + BI + C \quad (2)$$

másodfokú regressziós görbékkel szemléltetjük, ahol:

- $M$  – nyomaték [Nm];
- $I$  – áramerősség [A].



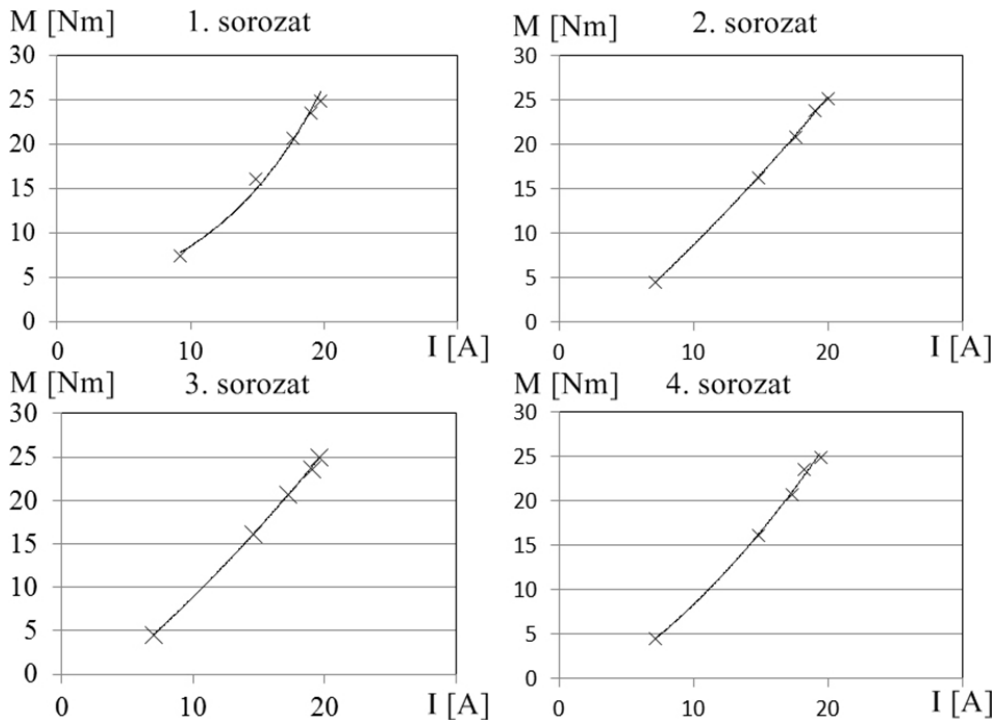
3. ábra Összesített mérési eredmények

### Eredmények kiértékelése

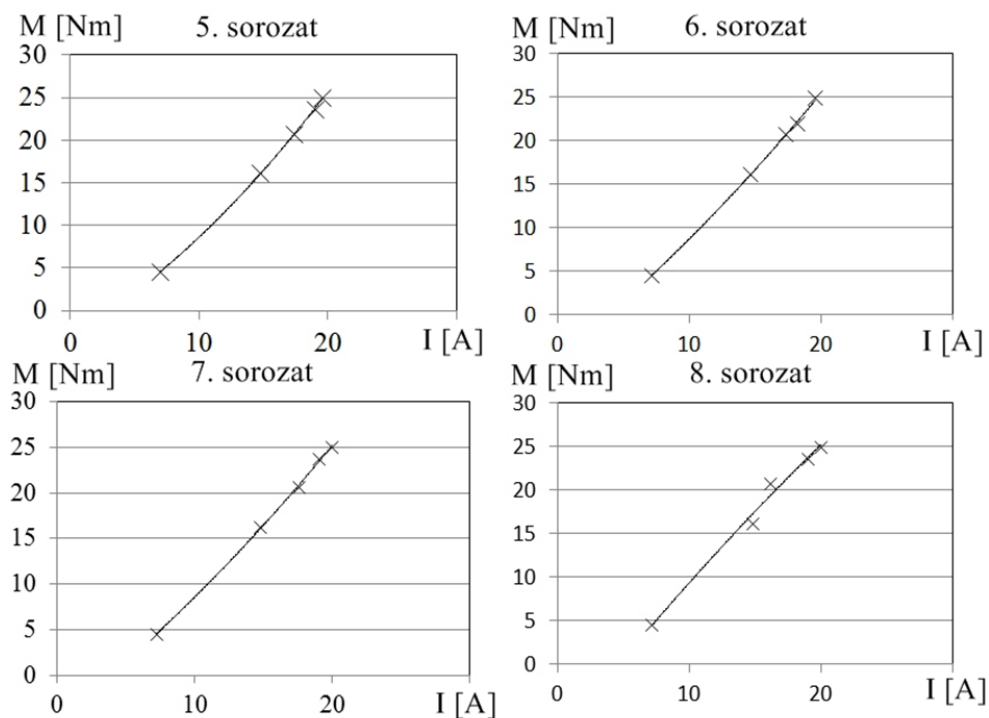
A mérési bizonytalanságok megértése érdekében most válasszuk szét és elemezzük, ábrázoljuk külön a nyolc csoport által elvégzett mérési sorozatok eredményeit, amiket a 4. és 5. ábra szemléltet. Az együtthatók értékei a 2. táblázatban találhatóak.

A regressziós parabolák  $I_1$  és  $I_2$  gyökei, valamint a talppont  $I_t$  helye szintén fontos ismérve a mérési sorozatok összehasonlításának.

Grafikusan érzékeltethető a legszemléletesebben, hogy az egyes csoportok eredményei milyen mértékű eltérést mutatnak. A regressziós parabolák mérési pontokra fektetett szakaszai viszont nem mutatják a teljes görbéket, így azok különbözőségét gyökeik és talppontjaik helyzete még szemléletesebben mutatja be.



4. ábra Csoport mérések eredményei. 1.

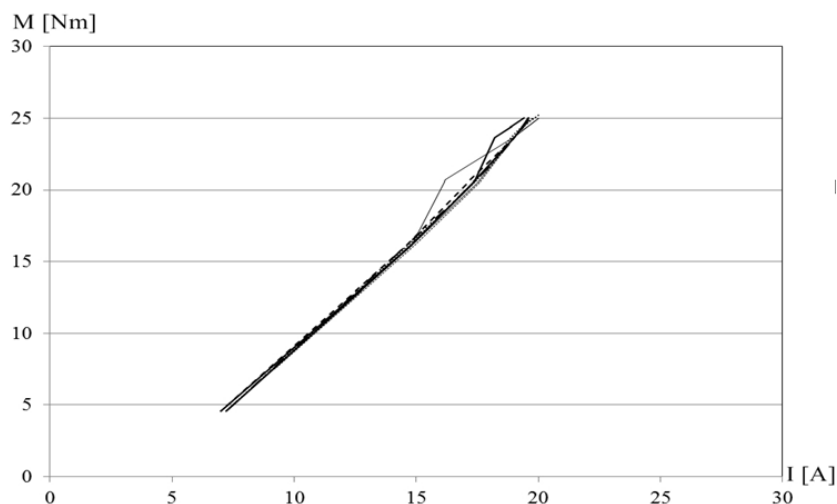


5. ábra Csoport mérések eredményei. 2.

Ezeket tüntettük fel a 2. táblázat utolsó három oszlopában.

sorozat	A [Nm/A <sup>2</sup> ]	B [Nm/A]	C [Nm]	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$I_t$ [A]
1	0,0349	0,6440	-1,3344	0,0023	-0,025	-0,0112
2	0,0175	1,1498	-4,3527	0,0011	-0,021	-0,0101
3	0,0282	0,8654	-2,8812	0,0024	-0,027	-0,0122
4	0,0169	1,1500	-4,6013	0,0011	-0,021	-0,0097
5	0,0109	1,9155	-8,7368	0,0006	0,020	0,0104
6	0,0158	1,1990	-4,8798	0,0010	-0,020	-0,0095
7	0,0377	0,7014	-2,4618	0,0043	-0,031	-0,0132
8	0,0148	1,2233	-5,0192	0,0009	-0,019	-0,0091
átlag	0,0221	1,1061	-4,2834	0,0017	-0,018	-0,0081
szórás	0,0101	0,3994	2,2302	0,0012	0,016	0,0076
rel.szórás	78%	36%	52%	74%	89%	94%
minimum	0,0109	0,644	-8,7368	0,0006	-0,031	-0,0132
maximum	0,0377	1,9155	-1,3344	0,0043	0,020	0,0104
összesített	0,0158	1,2016	-4,8443	0,0010	-0,020	-0,0095

2. Táblázat Regressziós görbék adatai

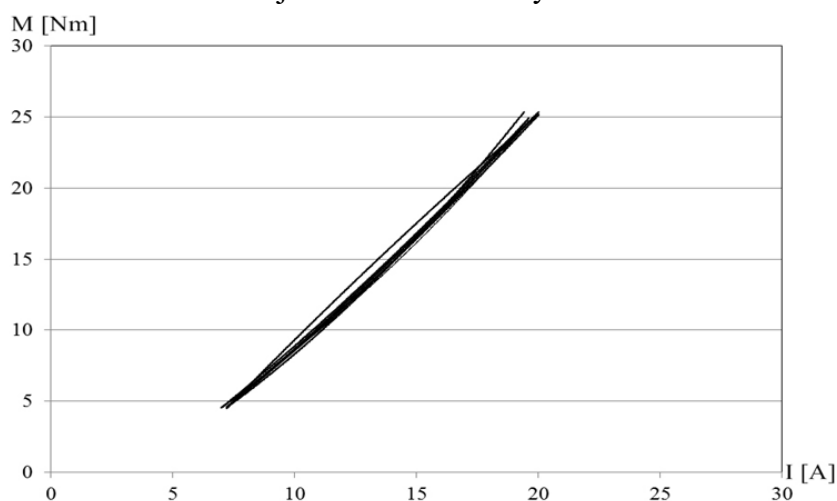


6. ábra Csoport mérések eredményei 3.

### Következtetések

Az áramerősségeket és tömegeket tartalmazó 1. Táblázatból már első ránézésre is kitűnik, hogy a 6. és a 8. mérőcsoportok a többiektől eltérő mérési pontokkal dolgoztak. Ez az eltérés önmagában nem jellemezheti a két csoport mérési sorozatainak pontosságát, hiszen a mérendő görbét bármely öt mért pontjával lehetne közelíteni, meghatározni.

A továbbiakban először nem választjuk szét az eredményeket mérési sorozatokra.



7. ábra Csoport mérések eredményeinek regressziós görbéi

Elemzésünknek ennél a pontjánál a mérések pontosságának meghatározásához a többségtől eltérő mérési pontokat kivesszük az adatok közül, mivel azonos mérési körülmények között, azonos súlyok alkalmazásával a mért áramerősség értékeknek egyezniük kellene.

Az összesítő 3. táblázat alapján vizsgálhatók az azonos gerjesztési értékekre vetített mérési pontosságok. Látható, hogy a leolvasott áramerősség értékek átlagértékhez viszonyított relatív szórása 1–3% között mozog, mely a mérések pontosságát rontja.

Amennyiben az összes mérési pontot továbbra is összesítve tekintjük, és a pontokra fektethető regressziós görbe együtthatóiból következtetünk, megállapítható, hogy az elvben origóból induló parabola talppontja a vízszintes tengelymentén  $-0,0095$  A-rel, illetve a függőleges tengely

mentén  $-4,84 Nm$ -rel tér el az elméletitől. Látszik, hogy az egy számjegyű relatív hibák is mérhetőek, érdemi abszolút hibát eredményeznek az elméletileg elvárttól.

	$I[A]$	$m[kg]$	$I[A]$	$m[kg]$	$I[A]$	$m[kg]$	$I[A]$	$m[kg]$	$I[A]$	$m[kg]$
	7	1,29	14,9	4,57		5,86		6,7		7,08
	7		14,6		17,7		19		19,76	
	7,2		14,8		17,2		19		19,60	
	7,2		14,8		17,4		19		19,60	
	7,2		14,8		17,6		19		20,00	
	7,2		14,6		16,2		19		20,00	
	7,2		14,8		17,4		18,2		19,40	
<b>átlag</b>	<b>7,14</b>		<b>14,8</b>		<b>17,3</b>		<b>18,9</b>		<b>19,7</b>	
<b>szórás</b>	<b>0,1</b>		<b>0,11</b>		<b>0,54</b>		<b>0,33</b>		<b>0,24</b>	
<b>rel. szórás</b>	<b>1,4%</b>		<b>0,74%</b>		<b>3,12%</b>		<b>1,75%</b>		<b>1,2%</b>	

3. Táblázat Mérési pontok összehasonlítása

Amennyiben a mérőcsoportok mérési sorozatait külön-külön vesszük górcső alá, és a sorozatonként meghatározható regressziós görbék együtthatóit és gyökeket vizsgáljuk, hasonló eredményre jutunk. Az átlagos eltérés az elméleti talpponttól ekkor  $-0,008 A$ , és  $-4,28 Nm$ .

A sorozatok relatív szórása a talppontokra nézve áramerősség ( $I_t$  oszlop adataiból) tekintetében 94%-os, míg nyomaték ( $M(I_t) = C$  oszlop adataiból) tekintetében pedig 52%-os.

Fontos kitérni arra a tényre is, hogy a többségtől eltérő mérési pontokat felvett mérőcsoportok eredményei sokkal pontosabban közelítik az összes mérés összesítéséből eredő görbét, mint a többi sorozat önmagában.

A 6. mérőcsoport mérési pontjaira fektetett regressziós görbe együtthatói jó közelítéssel meggyeznek az összesített eredmények feldolgozásakor kapott görbe együtthatóival. Ezeket az értékeket még a 8. mérőcsoport által meghatározott együtthatók közelítik a legjobban, egy-két százalékos pontossággal.

Az abszolút hibák és a relatív szórások alapján megállapítható, hogy a hallgatói mérések során fellépő bizonytalanság érdemi hibát eredményezett.

## ÖSSZEFOGLALÁS

Tanulmányunkban egy főáramkörű egyenáramú villamos motor mérési eredményeinek felhasználásával szemléltettük a parametrikus modellbizonytalanság egy legjellemzőbb forrását – a mérési bizonytalanságot. A vizsgálatunk során kapott eredmények jól felhasználhatóak az oktatásban. Részben, a hallgatók adott mérésre való felkészítésekor bemutathatók a várható mérési pontatlanságok és azok következményeinek szemléltetésére. Másrészt, a rendszertechnika jellegű tantárgyak keretében a modellbizonytalanság témakör oktatása során.

A Szerzők további kutatásainak egyik célja a mérési bizonytalanságok további oktatási célú elemzése.



**FELHASZNÁLT IRODALOM**

- [1] Bencsik-Felker-Fűrész-Harkay-Kerekes: Laboratóriumi gyakorlatok és feladatok a mechatronika alapjai tárgyakhoz, Budapesti Műszaki Főiskola, Budapest, 2005.
- [2] Nagyné Halász, E.; Pokorádi L.: Parametrikus modellbizonytalanság: egy anyagvizsgálati példa, A XXI. Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka előadásai, Kolozsvár, 2016, 293-296.
- [3] Pokorádi L.: Rendszerek és folyamatok modellezése, Campus Kiadó, Debrecen, 2008
- [4] Pokorádi L.; Molnár B.: A Monte-Carlo szimuláció szemléltetése, Szolnoki Tudományos Közlemények XIV, 2010, 1-12.
- [5] Uray Vilmos-Szabó Szilárd: Elektrotechnika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.

---

**ANALYSIS OF THE MEASUREMENT UNCERTAINTY OF THE SERIES EXCITATION DC MOTOR**

*During engineering measurements and calculations, there is a parametric uncertainty that can be modeled and described by appropriate mathematical methods. The main purpose of the measurements of electric machines is to determine the accuracy of their characteristics. This study presents one of the main sources of parametric model uncertainty, and illustrates it by means of the results of student measurement groups through the example of determining the series excitation DC motor characteristic curve.*

**Keywords:** *electric machines, characteristic curve, measurement, model uncertainty, parametric model uncertainty*

---

---

Stein Vera  
mestertanár  
Óbudai Egyetem  
Mechatronikai és Járműtechnikai Intézet  
Mechatronika Tanszék  
stein.vera@bgk.uni-obuda.hu  
orcid.org/0000-0002-8868-1677

---

Stein Vera  
assistant  
Óbuda University  
Institute of Mechatronics and Vehicle Engineering  
Department of Mechatronics  
stein.vera@bgk.uni-obuda.hu  
orcid.org/0000-0002-8868-1677

---

Dr. Pokorádi László, CSc  
egyetemi tanár  
Óbudai Egyetem  
Mechatronikai és Járműtechnikai Intézet  
pokoradi.laszlo@bgk.uni-obuda.hu  
orcid.org/0000-0003-2857-1887

---

Pokorádi László, CSc  
Full Professor  
Óbuda University  
Institute of Mechatronics and Vehicle Engineering  
pokoradi.laszlo@bgk.uni-obuda.hu  
orcid.org/0000-0003-2857-1887

---



[http://www.repulestudomany.hu/folyoirat/2017\\_3/2017-3-08-0431\\_Pokoradi\\_Laszlo-Stein\\_Vera.pdf](http://www.repulestudomany.hu/folyoirat/2017_3/2017-3-08-0431_Pokoradi_Laszlo-Stein_Vera.pdf)

