

ÖSSZETETT TÖBBFÁS GERENDATARTÓK PONTOSÍTOTT SZÁMÍTÁSA

Dr. Húth József mk. ezredes, egyetemi docens

Dr. Vas József hka., egyetemi adjunktus

ZMNE VSZTK Természettudományi tanszék

Bevezetés, a téma indoklása

Örök dilemma: Mi volt előbb? – a tyúk, vagy a tojás. Ilyen megválaszolhatatlan kérdés az is, hogy a természettudományok bővülése, a technika fejlődése teremtett lehetőséget a harceljárások változásához, vagy a harceljárások sokoldalúsága, a változások igénye kényszerítette ki a természettudományi kutatásokat, a technikai fejlődést; hozta lázba a természettudósokat, a kutatókat, a mérnököket.

Természetesen mi nem ezt a dilemmát szeretnénk most a saját szemüvegünkön keresztül eldöntetni, hanem belátva mind két fél szellemi erényeit és gyakorlati eredményeit, kölcsönös egymásra utaltságát, a technika iránt érdeklődőknek szeretnénk ismeretet nyújtani. Tesszük ezt azért is, hogy önmagunknak ismételten bizonyítsuk, hogy szerény részesei lehetünk a katonai szakma fejlődésének, résztvevői a hadtudomány művelőinek.

Több ízben találkozhatunk azzal a megfogalmazással, hogy **a hadügy egyik "forradalma"** - mellyel természetesen mint minden sommás véleménnyel lehet vitatkozni -, a tűzfegyverek létrejötte és ehhez kapcsolódóan a belsőégésű motorok megjelenése, a gépesítés növelése; egy gondolattal **a tüzérő és a mozgékonyág egyesítése.**

Az új fegyver- és vezetési-rendszerek, a mobil eszközök sokasága átrendezi a haderőket, megváltoztatja a harcolók, a harcbiztosítók és

kiszolgálók, a harcot támogatók arányát, a harcjelzéseket és gyökeresen megváltoztatja a harcra, vagy más, speciális feladatra történő előkészületeket is. A szárazföldi haderők jellemzője, bármilyen feladatot is teljesítsenek, hogy fegyverrendszerei, vezetési objektumai, logisztikai eszközei szinte kivétel nélkül mobil eszközök, melyek biztonságos mozgása elengedhetetlen feltétele a feladatok eredményes teljesítésének. Tehát a harcoló csapatok mozgásán túl fontos feladat a vezetés biztosítása, az ellátás maradéktalan teljesítése, sőt - az új feladatokra jellemzően - a civil lakosság ellátása, védelme mind azt követeli, hogy az eszközök mozgása folyamatosan biztosított legyen.

A harcoló csapatok ugyan megfelelő számban rendelkeznek nagymozgékonyságú kételtű eszközökkel, de ezek előkészítése még ma sem mellőzhető, időt és szaktudást igénylő feladat. A nélkülözhetetlen vezetési eszközök és az egyéb létfontosságú szállítóberendezések, rendelkeznek ugyan a terepjárást biztosító valamennyi berendezéssel, ennek ellenére mozgásbiztosításuk, az alapvető utak és műtárgyak kiépítése nem elhagyható feladat.

Közép-Európa földrajzi jellemzője, hogy erősen átszeldelt, bonyolult terepviszonyokkal, hogy számtalan különböző szélességű, folyási sebességű és partfelépítésű folyóval rendelkezik.

A rövid földrajzi jellemzés indokolja a jelentőségét annak, hogy behatóan foglalkozunk a mozgásbiztosítás egyik legjelentősebb eszközével a híddal és annak alapvető részével a **főtartóval**.

Tanulmányunkban a fa, mint tartó méretezésével foglalkozunk, egy olyan anyaggal, amely mindig "kéznél van", amely környezetbarát, sőt esztétikailag sem kifogásolható. Hadi környezetben különösen nagy jelentőséggel bír az a technikai megoldás, melynek jellemzője, hogy egyszerű és - éppen e tulajdonsága miatt is - nagyszerű; hogy anyaga a környezetben mindig megtalálható, hogy megvalósítása helyi találékonyság, lelemény eredménye is.

A dolgozat éppen arra igyekszik **matematikailag és mechanikailag** is bizonyított választ adni, milyen megoldást alkalmazzunk ha kevésbé alkalmas (pl: a szükségesnél kisebb keresztmetszetű) anyag, fa "kerül a kezünk ügyébe".

A hídépítésnél felhasználásra kerülő fa-tartók igénybevétele: hajlítás, nyírás. A keresztmetszete - természetes anyag lévén - korlátozott. Téglalap keresztmetszetet feltételezve ($a \times b$), ahol "a" és "b" maximális értékekkel rendelkeznek.

A feladat igénye szerint adott ℓ fesztávolságnál és a jármű által kifejtett terhelés esetében az " a_{\max} " x " b_{\max} " keresztmetszetű tartó nem felel meg - tönkremegy.

Másik fő szempont egy tartó méretezésénél a variabilitás - azaz legyenek olyan paraméterek, melyek változtatásával a tartó különböző feladatra is alkalmazható.

A hajlításra igénybevett fa tartó esetében egy lehetséges megoldás, az oly módon készített összetett tartó, melynél az ($a \times b$) méretű téglalap keresztmetszeteket (egyet, kettőt, többet) egymásra helyezünk. Például 2 darab $a \times b$ keresztmetszetű tartó keresztmetszeti tényezője:

$$K = \frac{a \cdot (2b)^2}{6} = \frac{4ab^2}{6}$$

Három egymásra helyezett $a \times b$ keresztmetszetű tartónál:

$$K = \frac{a \cdot (3b)^2}{6} = 9 \frac{ab^2}{6}$$

A példák mutatják, hogy a keresztmetszeti tényező jelentősen, négyszeresére, illetve kilencszeresére növelhető.

Az ötlet jónak tűnik, de az egymásra helyezett téglalapoknál a keresztmetszetben jelentkező növekedés csak akkor jelentkezik, ha a tartók "együtdolgozása" megoldott, azaz a tartók egymáson nem csúsznak el,

tökéletesen együtt mozognak.

Az együttdolgozás megoldására különböző mérnöki kapcsolatok jöhetnek számításba. A két, vagy több egymásra helyezett tartót szegezéssel, csavarozással, betétekkel, ragasztással stb. lehet összekötni, hogy a tartók közötti csúsztató feszültséget ezen kapcsoló elemek felvegyék és az elcsúszást megakadályozzák. A kapcsolatok a tartók együttdolgozását nagy részben megoldják, de a tökéletes együttdolgozás még így sem biztosított. A drága, ragasztott kapcsolat esetében sem.

Az érintkező felületek között bizonyos elmozdulás minden esetben fellép, mely tényt ezen tartók méretezésénél figyelembe is vesszük oly módon, hogy - a fentiekben, a tökéletes együttdolgozásnál már bemutatott négyszeres, illetve kilencszeres keresztmetszeti tényező növekedés helyett, a jelzett bizonytalanság miatt - egy egynél kisebb szorzó tényezőt alkalmazunk.

Például két és három tartó esetében a méretezésnél:

$$K = 4 \cdot \frac{ab^2}{6} \cdot \alpha \quad , \quad K = 9 \cdot \frac{ab^2}{6} \cdot \alpha$$

képlettel számolunk, ahol $\alpha < 1$ /0,6, 0,7, 0,85/

Az α tényező bevezetése hivatott arra, hogy a kapcsolatok nem tökéletesen merev voltát figyelembe vegye.

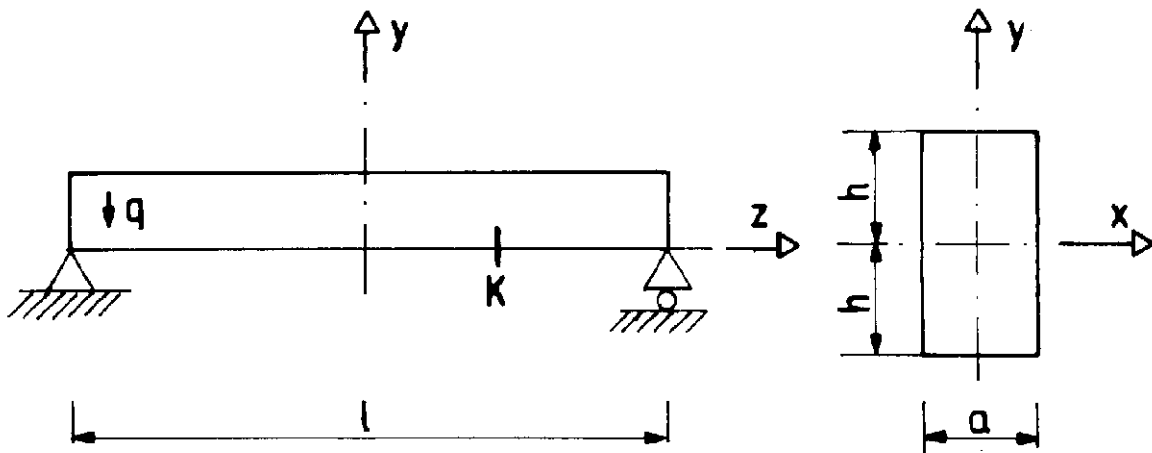
A tartó lehajlás számításánál hasonlóképpen $\beta < 1$ tényező bevezetésével számítjuk a másodrendű nyomatékot.

Cikkünk célja, hogy a nem tökéletesen merev kapcsolatot figyelembe véve tisztázzuk a fentiekben bemutatott összetett tartószerkezet pontos mechanikai viselkedését.

1. A statikai modell

Tárgyalásainkban a leggyakrabban használt mechanikai, statikai modellt

fogjuk vizsgálni. Egyéb terhelési esetekben, kis módosítással a bemutatott számítási eljárás alkalmazható.



1. ábra:

Az összetett kétfás gerendatartó statikai modellje és keresztmetszete

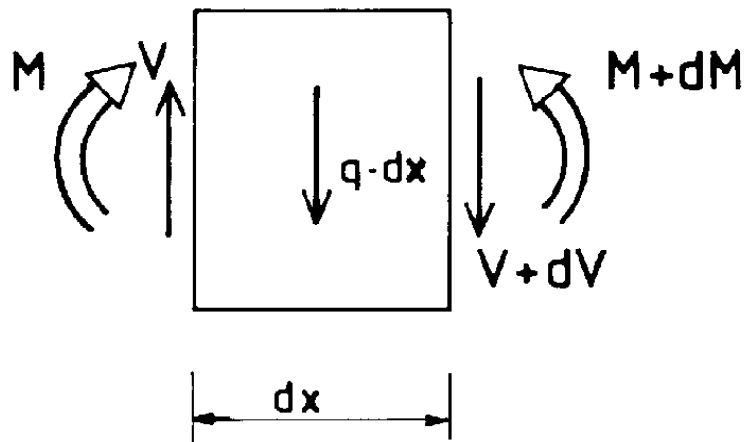
Az 1. ábrán vázolt $a \times h$ meg $a \times h$ keresztmetszetek érintkezési síkjában fabetétek, vagy acélgyűrűk, vagy ragasztás, vagy csavarozás, vagy hengergyűrűk akadályozzák az elcsúszást.

Érvényesnek tekintjük azt a feltevést, hogy az alakváltozás után a keresztmetszetek síkok maradnak. A két tartó között folytonos eloszlású nyíróerő-függvényt vezetünk be, melyet $n(x)[N/cm^2]$ jelöl.

1.1. Egyensúlyi egyenletek

Az 1. ábrán jelölt K keresztmetszet környezetéből vágjunk ki egy dx vastagságú elemi térfogatot.

Teljes tartó egyensúlya:



2. ábra:

A K keresztmetszet egyensúlya

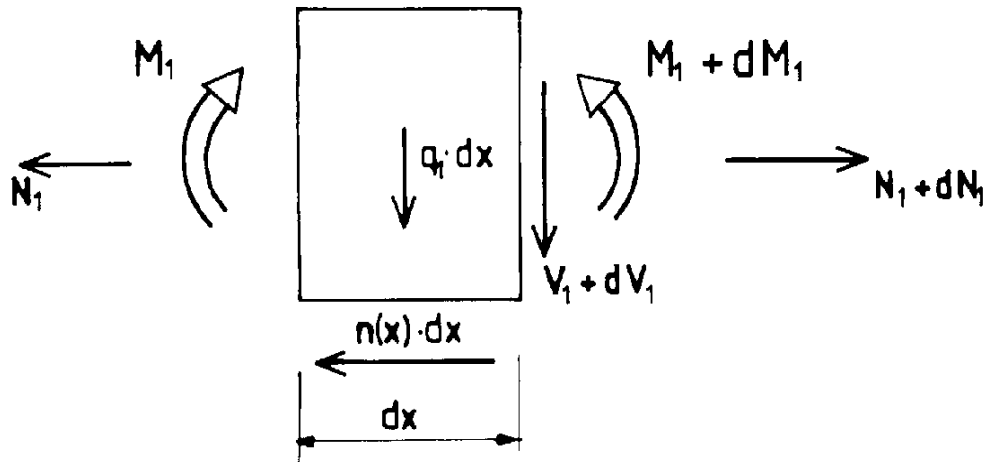
A 2. ábra szerint az egyensúlyi egyenletekből az alábbiak adódnak:

$$\sum M = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q$$

/1/

Felső tartó egyensúlya:



3. ábra:

A felső tartó egyensúlya

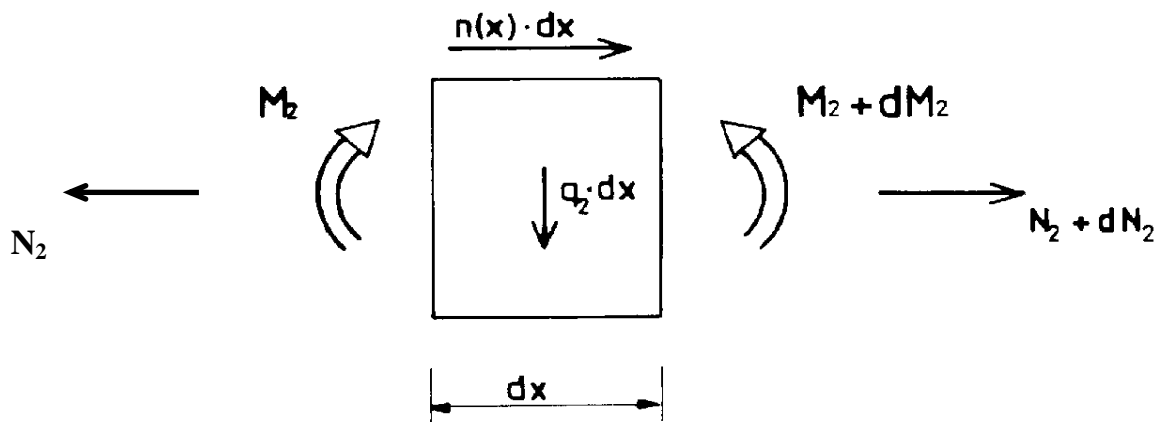
A 3. ábra alapján az egyensúlyi egyenletekből az alábbiakat kapjuk:

$$\sum M = 0 \Rightarrow \frac{dM_1}{dx} = V_1 + n(x) \cdot h$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \frac{dV_1}{dx} = -q_1$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow \frac{dN_1}{dx} = n(x) \quad /2/$$

Alsó tartó egyensúlya:



4. ábra:

Az alsó tartó egyensúlya

A 4. ábra alapján az egyensúlyi egyenletekből azt kapjuk, hogy:

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \frac{dM_2}{dx} = V_2 + n(x) \cdot h$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow \frac{dV_2}{dx} = -q_2$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow \frac{dN_2}{dx} = -n(x) \quad /3/$$

Továbbá fentiekből következik, hogy fennállnak az

$$M = M_1 + M_2$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$\frac{dN_2}{dx} = -\frac{dN_1}{dx}$$

$$q = q_1 + q_2$$

$$q_1 = q_2 \quad /4/$$

egyenletek is.

1.2. A feladat egyenletrendszere és megoldása

A felső és alsó tartók érintkezési felületén kielégítendő egy kompatibilitási egyenlet, mely az alábbi formába írható fel:

$$u_n + u_1 + u_2 = 0 \quad /5/$$

ahol alapfeltevésünk szerint

$$u_n = \frac{n(x)}{E_k} \quad /6/$$

ahol E_k a kapcsolati rugalmassági modulus.

Az elemi szilárdságtan ismert összefüggéseinek felhasználásával. [3]

$$u_1 = -\frac{h}{2EI} \int_0^x M_1 dx - \frac{1}{A_1 E} \int_0^x N_1 dx \quad /7/$$

$$u_2 = -\frac{h}{2EI} \int_0^x M_2 dx + \frac{1}{A_2 E} \int_0^x N_2 dx$$

Ha /6/ és /7/ egyenleteket behelyettesítjük az /5/ egyenletbe, kétszeri deriválással megkapjuk a kitűzött probléma alapegyenletét:

$$\frac{n''}{E_k} - n \left[\frac{2h^2}{EI} + \frac{2}{A_1 E} \right] = -\frac{h}{2EI} q \cdot x \quad /8/$$

ahol '' az x szerinti második deriváltat jelöli. A /8/ egyenlet megoldása, ismert módon

[3, 4] :

$$n(x) = A \sinh \lambda x + \frac{\mu}{\lambda^2} x \quad /9/$$

ahol

$$\lambda^2 = E_k \left[\frac{2h^2}{EI} + \frac{2}{AE_1} \right]$$

$$\mu = E_k \frac{h}{2EI} q \quad /10/$$

valamint A integrációs konstans, melyet úgy kapunk meg, ha /9/-et visszahelyettesítjük az /5/ kompatibilitási egyenletbe.

Részletezés nélkül az alábbi eredményre jutunk:

$$A = -\frac{E_k}{\lambda \cdot ch \lambda} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{h \cdot l^2}{8EI} + \frac{h}{2EI \lambda^2} \right] \cdot q \quad /11/$$

Egyszerűsítés céljából - de mint a későbbiekben látjuk - nagyon jó közelítéssel helyettesítsük a megoldásfüggvényt /9/ egy lineáris függvénnyel, úgy hogy a $(0 - \frac{1}{2})$ szakaszon számított integráljuk megegyezzen.

Tehát a közelítés legyen

$$\bar{n}(x) = D \cdot x \quad /12/$$

e szerint:

$$\int_0^{\ell/2} D \cdot x dx = \int_0^{\ell/2} \left(A \cdot \text{sh } \lambda x + \frac{\mu}{\lambda^2} x \right) dx \quad /13/$$

/13/ egyenletből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D &= \frac{2 \cdot A}{\lambda} \left(\text{ch } \lambda \cdot \frac{\ell}{2} - 1 \right) \cdot \frac{2}{\ell} + \frac{\mu}{\lambda^2} \cdot \frac{\ell}{4} = \\ &= -\frac{2 \cdot h \cdot E_k}{\lambda^4 \cdot \ell \cdot I \cdot E} + \frac{E_k \cdot h \cdot \ell}{E \cdot I \cdot \lambda^2 \cdot \text{ch } \lambda \frac{\ell}{2}} \end{aligned} \quad /14/$$

A további számításokban, tehát az $\bar{n}(x)$ alakot fogjuk használni.

A fentiekben csupán megelőlegeztük a közelítés jóságát. A szélsőértékek vizsgálatával most ezt bizonyítjuk.

Határozzuk meg a nyomatékfüggvényt:

$$M = \int_0^x (V + h \cdot n) dx - \int_0^{\ell/2} (V + n \cdot h) dx = -q \frac{x^2}{2} + h \cdot D \cdot \frac{\ell^2}{8} \quad /15/$$

A maximális nyomaték /15/ egyenletből:

$$M(x=0) = M_{\max} = -\frac{q\ell^2}{8} - h \cdot D \cdot \frac{\ell^2}{8}$$

a) Ha a kapcsolati rugalmassági modulus $E_k \rightarrow \infty$, ez a tökéletes együttdolgozás esete, akkor

$$D \approx -\frac{1}{E_k} \dots + \frac{1}{\text{ch } \sqrt{E_k} \dots} \dots \rightarrow 0$$

azaz

$$\bar{n} = 0 \quad \text{és} \quad M_{\max} = -\frac{q\ell^2}{8}$$

A maximális nyomaték nem különbözik az egységes tartónál számított nyomatéktól, tehát a korrekciós tényező, $\alpha = 1$.

b) $E_k \rightarrow 0$, nincs kapcsolat a két tartó között, akkor $D \rightarrow \infty$, tehát $\alpha = 0$.

A két szélső eset között E_k pozitív szám, $/E_k < \infty/$. A fentiekből következik, hogy $0 < \alpha < 1$ lesz. E_k a különböző kapcsolatoknál kísérletileg meghatározható, az α értéke pedig ez alapján számítható.

2. A szerkezet méretezése:

A méretezéshez szükséges jellemző értékek, a maximális nyomaték és a lehajlás az előzőek figyelembe vételével:

$$|M_{\max}| = \frac{q\ell^2}{8} + h \cdot D \cdot \frac{1^2}{8}$$
$$y_{\max} = \frac{5(q + h \cdot D)\ell^4}{384E \cdot I} \quad /16/$$

amiből, a feszültségek azonossága alapján, az alábbiak szerint az α értéke meghatározható:

$$\frac{\frac{q\ell^2}{8}}{K \cdot \alpha} = \frac{\frac{q\ell^2}{8} + h \cdot D \cdot \frac{1^2}{8}}{K}$$

azaz

$$\alpha = \frac{\frac{ql^2}{8}}{\frac{ql^2 + h \cdot D \cdot \frac{l^2}{8}}{8}} = \frac{q}{q + h \cdot D}$$

továbbá a maximális elmozdulások egyenlősége alapján, β is kiszámítható:

$$\frac{5ql^4}{384E \cdot I \cdot \beta} = \frac{5(q + h \cdot D)l^4}{384E \cdot I}$$

azaz

$$\beta = \frac{q}{q + h \cdot D}$$

Összefoglalás

A cikkben összetett - hajlított + nyírt - fatartó pontosított számítására mutattunk be egy új számítási módszert, ahol figyelembe vettük a kapcsolatban létrejövő kedvezőtlen hatásokat, úgy, hogy a kapcsolati erőket **folytonos eloszlású nyírőerő függvénnyel helyettesítettük**.

Tehát különböző kapcsolati módoknál e pontosított számítási modell lehetővé teszi, a jelenlegi méretezési feltételekben szereplő α , β tényezők pontos meghatározását.

A méretezéshez szükséges további jellemzők számítására egyszerűsítést alkalmaztunk. A képletek különböző kapcsolati rugalmassági modulusok $|E_k|$ esetén alkalmazhatók, azaz különböző mérnöki kapcsolati megoldásokhoz más és más E_k jellemző rendelhető.

A számítási módszert kísérletekkel kívánjuk ellenőrizni, s használhatóságát igazolni. A későbbiekben ezekről is beszámolunk.

Irodalom:

[1] MSZ 15021/1-86

[2] Bölcskei E. - Dulácska E.: Statikusok könyve Bp. MK 1974.

[3] Palotás L.: Mérnöki kézikönyv 2. Bp. MK 1984.

[4] Füzy I.-Vas J.: Szimmetrikus húzott - nyomott - övű, rugalmasan kapcsolt öszvértartók számítása. Építési Kutatási Fejlesztés 1980. 3.sz. Pp: 188-190.