

TETSZŐLEGES HATÁRGÖRBÉJŰ VÉGTELEN FÉLSÍK PEREMÉRTÉK-FELADATÁNAK MEGOLDÁSA A POISSON- INTEGRÁL FELHASZNÁLÁSÁVAL

Dr. Vas József

1. BEVEZETÉS

Ha végiggondoljuk, kevés olyan természettudományi ismeret van, amely nem kapcsolódott, vagy nem kapcsolódik a hadtudományhoz.

Kevés olyan tudományos és technikai érték van, amelynek első próbája és sikere nem a haditechnikában jelentkezett.

Az elmúlt évtizedekben a hazai és nemzetközi tudományos ismeretek jelentős része nem épült be a tisztképzés oktatási rendszerébe, s a tisztképzésben dolgozó oktatók, kutatást végzők sem tudtak megismerkedni ezen eredményekkel, katonai alkalmazási lehetőségeikkel.

A műszaki csapatok jelentősége a NATO-hoz való csatlakozásunkkal felértékelődik. /IFOR/SFOR Magyar Műszaki Kontingens: hídépítések, útépítések, helyreállítások stb.../

Az építőmérnök képzésben és gyakorlatban az egyik legfontosabb "építőanyag" a talaj /a kötött és kötetlen szemcsés közeg/. A hadiútépítések, mellvéd alatti fedezékek s a talajjal összefüggő építések /csatornák, hidak, alapozások.../ nem nélkülözhetik a talajjal kapcsolatos számítások, számítási módszerek, korszerű talajmechanikai elméletek ismeretét.

E cikkben a talaj mechanikai viselkedésének követésére /leírására/ mai napig leggyakrabban használt ún. klasszikus kontinuummodell feltevésrendszerére alapozott új - több célra felhasználható - számítási módszert mutatunk be.

A végtelen féltér nem más, mint a talaj, melyre s melybe különböző műtárgyakat, katonai műtárgyakat építünk. Az ismertett megoldásmódszer újszerű s viszonylag egyszerű - felhasználható konkrét, a fentiekben ismertett feladatok esetében.

Algoritmusszinten megadja - széles körben - a talajjal kapcsolatos mechanikai feladatok megoldásához szükséges ismereteket.

Hallgatóink az ismertett számítási módszerre alapozhatják tudományos diákköri vagy szakdolgozat témáikat; az oktatók - elsősorban a a műszaki építőmérnöki tisztképzésben résztvevők - szakmai és tudományos munkájukban is eredményesen felhasználhatják.

1.1. A rugalmasságtan feltevései, alapegyenletei

A rugalmasságtani feladatokban a következő feltevésekkel élünk:

- a vizsgált test anyaga homogén, izotróp,
- a test anyaga lineárisan rugalmas veselkedésű,
- a test anyaga folytonosan kitölti a rendelkezésre álló térrészt.

Fenti feltételezéseknek eleget tevő anyag rugalmas tulajdonságai két paraméterrel jellemezhetők

E: a rugalmassági modulus

ν : a Poisson tényező

Az ezeken kívül még használatos jellemző: a G csúsztató rugalmassági modulus, amely a

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

összefüggéssel adható meg.

A rugalmasságtani feladatoknál feltételezzük, hogy a vizsgált testet egyensúlyi erőrendszer terheli.

Ezen feltételezés mellett a feladat: meghatározni a test egyes pontjainak elmozdulását, valamint alakváltozási - és feszültségállapotát. Az így megfogalmazott feladat -általános térbeli esetben- 15 ismeretlen meghatározását jelenti. Ezek:

- az elmozdulásvektor három komponense $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z)$
- az alakváltozási tenzor 6 független komponense $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$
- a feszültségtenzor 6 független komponense $(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

Az ismeretlenek meghatározásához 15 független egyenlet szükséges. Ezek az elméletben rendelkezésre állnak.

Felírható 3 db egyensúlyi egyenlet:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{S}} + \underline{f} = \underline{0} \quad (1)$$

ahol ∇ a Hamilton-féle differenciáloperátor,

$$\underline{\underline{S}} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

a feszültségtenzor és \underline{f} a térfogati erők vektora. Felírható 6 db geometriai egyenlet:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla \underline{o} \underline{u} + \underline{u} \nabla \underline{o}) \quad (2)$$

ahol \underline{u} = az elmozdulásvektor,

\underline{o} a diadikus szorzás jele,

$$\underline{\underline{D}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

az alakváltozástenzor.

Az elméletben érvényesnek tekintjük a Hook-törvényt, mely az alakváltozás- és a feszültségtenzor közötti lineáris kapcsolatot fejezi ki (6 egyenlet).

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \left[\underline{\underline{S}} - \frac{\nu}{1+\nu} S_1 \cdot \underline{\underline{I}} \right] \quad (3)$$

ahol $S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ a feszültségtenzor első skalár invariánsa, $\underline{\underline{I}}$ az egységtenzor.

A rugalmasságtani feladatok egyértelmű megfogalmazásához a vizsgált test határoló felületén peremfeltételeket írunk elő. Ezzel a feladat egyértelmű megfogalmazást nyer.

1.2 A rugalmasságtan síkfeladatai

Ha a test mérete valamely irányban nem változhat meg: sík-alakváltozási állapotról, ha valamely irányban nem ébred feszültség: sík-feszültségi állapotról beszélünk.

Ezen esetekben az elméletben szereplő ismeretlenek száma és természetesen az egyenletek száma is csökken. A továbbiakban a sík-feszültségi állapottal foglalkozunk.

Ebben az esetben - feltételezve, hogy a vizsgált sík az (x,y) sík-
 $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, s így az (1) egyensúlyi egyenletekből kettő marad.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Ezen egyensúlyi egyenletek kielégíthetők egy kétváltozós $F(x,y)$ függvény bevezetésével (Airy-féle feszültségfüggvény), mely segítségével a feszültségek kifejezhetők:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - f_x \cdot x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - f_y \cdot y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (5)$$

feltételezve, hogy a térfogati erőrendszer intenzitása (f_x , f_y) konstans.

Az Airy-féle feszültségfüggvény meghatározása (lásd. [2]) a

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (6)$$

biharmonikus differenciálegyenlet megoldását jelenti, ahol a vizsgált test határfelületén előírható peremfeltételek

$$p_x = \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y$$

/7/

$$p_y = \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_{xy} \cdot n_y$$

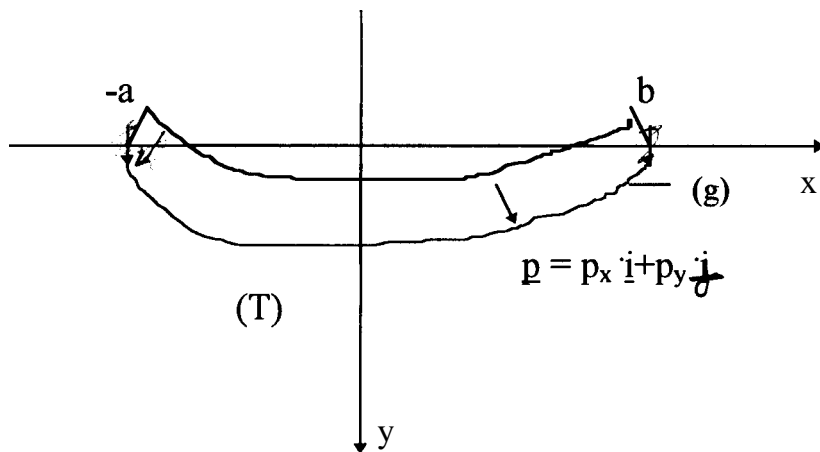
ahol $\underline{n} = [n_x; n_y]$ a határoló felület normális egységvektora

2. A FELADAT MEGFOGALMAZÁSA

Tekintsük az I. ábrán vázolt feladatot.

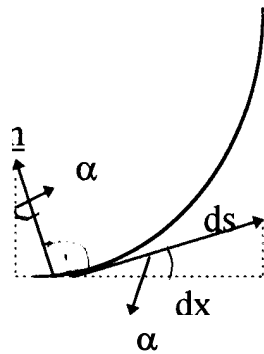
Meghatározandó a (T) tartományban biharmonikus $F(x,y)$ függvény, melynek segítségével az (5)-nek megfelelően számíthatók a feszültségek a tartomány tetszőleges pontjaiban.

A (T) tartomány (g) határgörbájén p intenzitású terhelés működik.



1. ábra

A (g) görbén előírható peremfeltételek (7) alapján, a 2. ábra jelöléseinek felhasználásával felírhatók.



2. ábra

$$\underline{n} = |n| \cdot \sin \alpha \cdot \underline{i} + |n| \cdot \cos \alpha \cdot \underline{j} \quad |n| = 1$$

$$\underline{n} = |n| \cdot \sin \alpha \cdot \underline{i} + |n| \cdot \cos \alpha \cdot \underline{j} \quad |n| = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds} \quad \cos \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad /8/$$

$$n_x = \underline{n} \cdot \underline{i} = |n| \cdot \sin \alpha = \frac{dy}{ds}$$

$$n_y = \underline{n} \cdot \underline{j} = |n| \cdot \cos \alpha = -\frac{dx}{ds}$$

lesz.

A (8) figyelembe vételével (7) egyenletek felírhatók az F feszültségfüggvénnyel:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = p_x$$

/9/

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} = -p_y$$

(9) rendezésével és mindkét oldal integrálásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int p_x \cdot ds = Q(x, y)$$

/10/

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int p_y \cdot ds = S(x, y)$$

valamint

$$F = \int \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int \frac{\partial F}{\partial y} dy = \int S dx + \int Q dy = R(xy) \quad /11/$$

a (T) tartományt határoló (g) görbén

A feladat fenti eredmények figyelembe vételével ezek után a következőképpen fogalmazható meg:

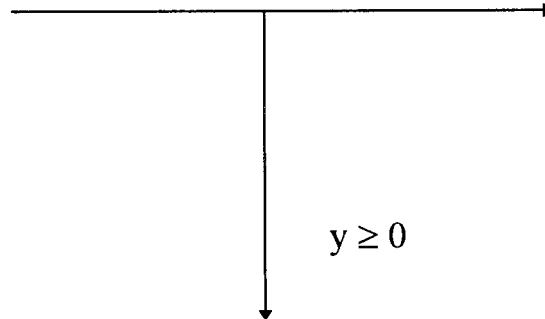
Meghatározandó a (T) tartományban biharmonikus F (x,y) függvény, mely a határoló (g) görbén:

$$F=R(x,y) \quad /12/$$

előírt értékeket veszi fel.

3. A FELADAT MEGOLDÁSA

3.1 Segédprobléma megoldása



3. ábra

Valamely $a(x,y)$ függvényt harmonikus függvénynek nevezünk, ha kielégíti a $\Delta a(x,y)=0$ egyenletet. Az $a(x,y)$ harmonikus függvény az $y \geq 0$ végtelen félsíkon (3.ábra) a Poisson integrál segítségével az alábbi formában előállítható:

[3]

$$a(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \cdot h(\alpha) d\alpha \quad /13/$$

ahol $h(\alpha)$ az $a(x,y)$ függvény előírt értékei az $y = 0$ határoló egyenesen.

Az $y \geq 0$ tartományban biharmonikus $F(x,y)$ függvény előállítható két harmonikus függvény segítségével az alábbi formában:

$$F(x,y) = a(x,y) + y \cdot b(x,y) \quad /14/$$

ahol tehát:

$$\Delta a(x,y) = 0$$

$$\Delta b(x,y) = 0$$

Legyen a biharmonikus $F(x,y)$ függvény és deriváltja adott a felsík határoló egyenesén:

$$F(x, 0) = h(x)$$

/15/

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,0) = g(x)$$

(15) előírásokkal - felhasználva (14) előállítást:

$$F(x,0) = a(x,0) + 0 \cdot b(x,0) = a(x,0) = h(x)$$

/16/

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,0) = g(x) = \frac{\partial a}{\partial y}(x,0) + b(x,0)$$

Belátható, hogy a $\frac{\partial a}{\partial y} + b$ függvény is harmonikus, melynek értéke az $y=0$

határvonalon $g(x)$, így a Poisson-integrállal meghatározható:

$$\frac{\partial a}{\partial y} + b = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\alpha)^2 + y^2} \cdot g(\alpha) d\alpha \quad /17/$$

(17)-ből - felhasználva (13)-t - a $b(x,y)$ harmonikus függvény is előállítható.

Részletezés nélkül:

$$b = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\alpha)^2 + y^2} \cdot g(\alpha) d\alpha - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\alpha)^2 - y^2}{[(x-\alpha)^2 + y^2]^2} \cdot h(\alpha) d\alpha \right\} /18/$$

S fentiek alapján a biharmonikus $F(x,y)$ feszültségfüggvény (14)-nek megfelelően:

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(x-\alpha)^2 + y^2} \cdot g(\alpha) d\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot y^3}{[(x-\alpha)^2 + y^2]^2} \cdot h(\alpha) d\alpha \right\} \quad /19/$$

3.2 Az eredeti probléma megoldása

A 3.1 pontban részletezett módon meghatároztuk az $F(x,y)$ biharmonikus függvényt, az $y = 0$ határvonalon - adott értékei segítségével. Az eredetileg kitűzött feladat (lsd 2. pont) abban különbözik a segédfeladattól, hogy a peremfeltételek a (g) görbén adóttak, mely határgörbe nem feltétlenül azonos az $y = 0$ egyenessel.

Az eredetileg kitűzött feladatot a 3.1 pont eredményeinek felhasználásával a következő lépésekben oldjuk meg:

a) A (19) egyenlet segítségével előállítunk egy biharmonikus $W(x,y)$ függvényt, mely az $y=0$ vonalon a $W(y=0) = h(x)$; $\frac{\partial W}{\partial y}(y=0) = g(x)$ peremfeltételeket veszi fel. (19) alapján írható, hogy:

$$W(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(x-\alpha)^2 + y^2} \cdot g(\alpha) d\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot y^3}{[(x-\alpha)^2 + y^2]^2} \cdot h(\alpha) d\alpha \right\}$$

/20/

$$\frac{\partial W}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot y \cdot (x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2 + y^2]^2} \cdot g(\alpha) d\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6 \cdot y^2 \cdot (x-\alpha)^2 - 2 \cdot y^4}{[(x-\alpha)^2 + y^2]^3} \cdot h(\alpha) d\alpha \right\}$$

b) Kiszámítjuk $W(x,y)$ függvény értékeit az $y \geq 0$ tartományban haladó (g) görbén és ezeket egyenlővé tesszük az $F(x,y)$ függvény (g) görbén adott peremértékeivel. Ebből az egyenletrendszerből $h(x)$, $g(x)$ meghatározhatók:

c) Mivel $W(x,y)$ biharmonikus az $y \geq 0$ tartományban és a b.-ben biztosított feltételek szerint a (g) görbén $F(x,y)$ előírt értékeit veszi fel, ezért a (T) tartományban (lsd. 1. ábra)

$$W(x,y) \equiv F(x,y)$$

a keresett függvénnyel.

3.3 Közelítő számítás $F(x,y)$ függvény előállítására

A 3.2 pontban ismertetett módszer b. pontja szerint írható, hogy:

$$R(x_{ig}, y_{ig}) = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-a}^b \frac{y_{ig}^2}{(x_{ig} - \alpha)^2 + y_{ig}^2} \cdot g(\alpha) d\alpha + \int_{-a}^b \frac{2 \cdot y_{ig}^2}{[(x_{ig} - \alpha)^2 + y_{ig}^2]^2} \cdot h(\alpha) d\alpha \right\}$$

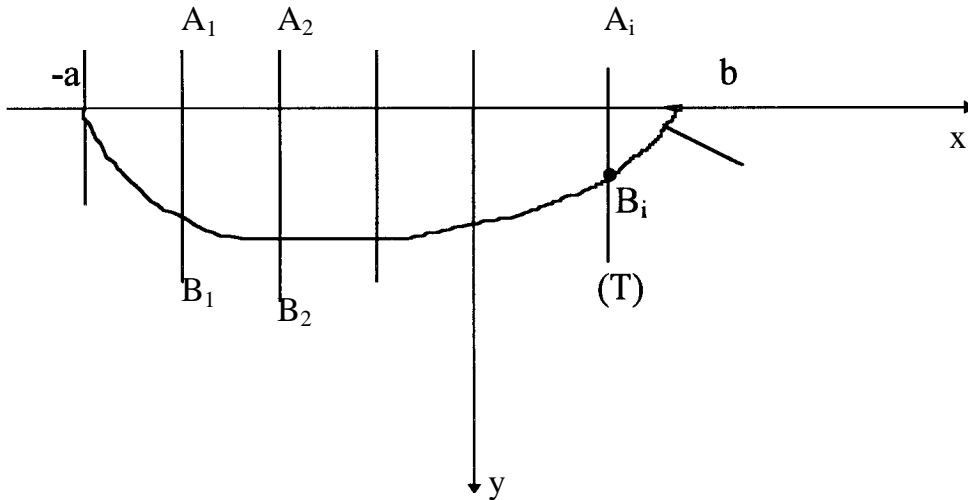
/21/

$$Q(x_{ig}, y_{ig}) = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-a}^b \frac{2y_{ig} \cdot (x_{ig} - \alpha)}{[(x_{ig} - \alpha)^2 + y_{ig}^2]^2} \cdot g(\alpha) d\alpha + \int_{-a}^b \frac{6 \cdot y_{ig}^2 \cdot (x_{ig} - \alpha)^2 - 2y_{ig}^4}{[(x_{ig} - \alpha)^2 + y_{ig}^2]^3} \cdot h(\alpha) d\alpha \right\}$$

Fenti két integrálegyenlet megoldásával meghatározhatók a g, h függvények.

Alkalmazzuk az alábbi közelítő módszert:

A (T) tartomány (g) határgörbájén vegyünk fel n db diszkrét pontot, melyeket az y tengellyel párhuzamos egyenesekkel metszünk ki. (Isd 4. ábra)



4. ábra

A 4. ábra alapján, mint látható az egyenesek az $y = 0$ egyenesen n db pontot metszenek ki, melyek közül az i-edik koordinátái: $A_i (x_i ; 0)$, valamint a (g) görbén szintén n db pontot metszenek ki, melyek közül az i-edik pont koordinátái: $B_i (x_i ; y_{ig})$, (21) egyenleteket felírhatjuk a fent definiált A_i, B_i pontokra, így azt kapjuk, hogy:

$$R_i = K_{ij}^1 \cdot g_j + H_{ij}^1 \cdot h_j$$

/22/

$$Q_i = K_{ij}^2 \cdot g_j + H_{ij}^2 \cdot h_j$$

ahol

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} R(B_1) \\ R(B_2) \\ \vdots \\ M \\ \vdots \\ R(B_N) \end{pmatrix} \quad \underline{Q} = \begin{pmatrix} Q(B_1) \\ Q(B_2) \\ \vdots \\ M \\ \vdots \\ Q(B_N) \end{pmatrix} \quad /23/$$

valamint

$$K_{ij}^1 = \frac{1}{\pi \cdot N} \cdot \frac{y_{ig}^2}{(x_{ig} - x_j)^2 + y_{ig}^2}$$

$$K_{ij}^2 = \frac{1}{\pi \cdot N} \cdot \frac{2 \cdot y_{ig}^2}{(x_{ig} - x_j)^2 + y_{ig}^2}$$

/24/

$$H_{ij}^1 = \frac{1}{\pi \cdot N} \cdot \frac{2 \cdot y_{ig} \cdot (x_{ig} - x_j)}{\left[(x_{ig} - x_j)^2 + y_{ig}^2 \right]^2}$$

$$H_{ij}^2 = \frac{1}{\pi \cdot N} \cdot \frac{6 \cdot y_{ig}^2 (x_{ig} - x_j) - 2 \cdot y_{ig}^4}{\left[(x_{ig} - x_j)^2 + y_{ig}^2 \right]^3}$$

és

$$\underline{g} = \begin{pmatrix} g(A_1) \\ g(A_2) \\ \mathbf{M} \\ g(A_N) \end{pmatrix} \quad \underline{h} = \begin{pmatrix} h(A_1) \\ h(A_2) \\ \mathbf{M} \\ h(A_N) \end{pmatrix} \quad /25/$$

(22) mátrixegyenleteket az alábbi tömör formába írhatjuk:

$$\underline{m} = \underline{A} \cdot \underline{x} \quad /26/$$

ahol \underline{m} , \underline{x} ($2N \times 1$) méretű vektorok, \underline{A} ($2N \times 2N$) méretű mátrix:

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} R(B_1) \\ R(B_2) \\ \mathbf{M} \\ R(B_N) \\ Q(B_1) \\ \mathbf{M} \\ Q(B_N) \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} g(A_1) \\ g(A_2) \\ \mathbf{M} \\ g(A_N) \\ h(A_1) \\ \mathbf{M} \\ h(A_N) \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{K}^1 & \underline{H}^1 \\ \underline{K}^2 & \underline{H}^2 \end{pmatrix} \quad /27/$$

(26) -ból - \underline{A} mátrix inverze segítségével - megkaphatjuk az $y = 0$

határegyenesen g, h függvényértékeket:

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{m} \quad /28/$$

(28) -al megoldottuk a 3.2 pontban kitűzött feladatot, tehát meghatároztuk a (T) tartományban biharmonikus függvénynek és deriváltjának az $y = 0$ határvonal N pontjában felvett értékeit.

Ezen függvényértékek segítségével a (T) tartomány bármely pontjában biharmonikus $F(x,y)$ függvény értékei számíthatók.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmányban bemutattunk egy közelítő módszert tetszőleges határgörbéjű végtelen félsík feszültségi és alakváltozási állapotának meghatározására alkalmas feszültségfüggvény számítására.

A feladat elég általánosan került megfogalmazásra ahhoz, hogy e közelítő módszert jó néhány konkrét gyakorlati feladat megoldásához alkalmazni lehessen. A közölt képletek alkalmasak számítógépes program elkészítésére.

A számított eredmények pontossága a felvett pontok számának (N) növelésével fokozható.

Irodalom:

1. Vas J.: A Poisson-integrál kiterjesztése többszörösen összefüggő tartományra
Építési Kutatási Fejlesztés 1980 3. -sz.
2. Béda Gy.- Kozák I: Rugalmas testek mechanikája Műszaki Könyvkiadó 1987
3. Gáspár Gy: Műszaki Matematika Tankönyvkiadó Bp. 1969.