

Dr. Hanka László PhD.

Óbudai Egyetem Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar,
Mechatronikai Intézet

E-mail: hanka.laszlo@gbk.uni-obuda.hu

KOCKÁZAT BECSLÉSE A VALÓSZÍNŰSÉG KISZÁMÍTÁSA NÉLKÜL, A MEGBÍZHATÓSÁGI INDEX ÉS ALKALMAZÁSA

***Absztrakt:** A rendelkezésre álló adatok szerint a terrorizmus aktivitása napról-napra növekszik, különösen az utóbbi 15 évben. A terrorizmus globális problémává vált. A modern terrorizmus azonban jellegében eltér a múltbéliétől. Napjainkban a terroristáknak lehetősége van az innovatív technológiák alkalmazására. Ez merőben új kihívást jelent a védekezés szempontjából a szakemberek számára. A kockázatelemzés elmélete és módszerei alkalmazhatók arra, hogy segítségével becslést adjunk a terrorcselekmények bekövetkezésére és a következményekre vonatkozólag. A kockázat becslésére matematikai módszerek alkalmazhatóak, ezen belül is széleskörűen alkalmazott a valószínűségelméleti megközelítés. Azonban a valószínűségek kiszámítása gyakran problémákba ütközik, analitikusan a számítás gyakran lehetetlen. Ebben a dolgozatban bemutatjuk, hogyan lehet kockázatot becsülni a valószínűség közvetlen kiszámítása nélkül, a megbízhatósági index segítségével.*

***Abstract:** According to data, terrorist activity tend to grow steadily, especially during the past 15 years. Terrorism became a global problem. Modern terrorism differs from the terrorism of the past. Nowadays terrorists have the opportunity to use innovative technologies. According to defence and protection this is an entirely new challenge for experts. The theory of risk and methods of risk analysis can be applied to assess the risk of terrorist activity and consequences. Mathematical methods, especially the probabilistic approach is widely applied for expressing the risk. But the exact analytical calculation of probability is always impossible. In this paper the theory of reliability index will be demonstrated in the context of terrorist's threat. It seems to be extremely suitable framework for this purpose, because risk can be assessed without direct calculation of probability.*

***Kulcsszavak:** megbízhatósági index, határállapot függvény, biztonsági határ, tervezési pont.*

***Keywords:** reliability index, limit state function, safety margin, design point.*

1. BEVEZETÉS

A kritikus infrastruktúra elleni robbantásos cselekmények kockázatának becslése [1-4] többek között azt igényli, hogy analitikusan nehezen vagy egyáltalán nem kezelhető esetekben is kiszámítható legyen bizonyos események valószínűsége, ezáltal becsülhető legyen a kockázat. A címként megjelölt megbízhatósági index – amelyet e pontban részletesen tanulmányozunk – szerepe kettős. Egyrészt alkalmazható abban az esetben, ha megelégszünk közelítő

eredménnyel, ha a valószínűségek pontos, analitikus, esetleg Monte Carlo szimulációval történő kiszámítását megkerülve egy „elsőrendű” közelítő valószínűségi adatot határozunk meg egy adott probléma vizsgálata kapcsán. Másrészt pedig, ha a kérdés pontosabb adatokat igényel, megalapozza az analitikus vagy Monte Carlo módszerek alkalmazását, fokozza azok pontosságát és csökkenti a számítások mennyiségét valamint a számításokhoz szükséges időtartamot.

Egy kritikus infrastruktúrához tartozó épület, építmény a vizsgálat célja szempontjából tanulmányozható, mint pontrendszer, merev test, rugalmas test, stb., illetve ezek együttese. Nyilvánvaló, hogy egy ilyen fizikai rendszer jellemezhető a rendszer állapotát meghatározó bizonyos fizikai mennyiségekkel – anyagi állandók, rugalmassági együtthatók, stb. – amelyeket valószínűségi változóknak tekintünk. Tegyük fel, hogy erre a rendszerre hatással vannak bizonyos fizikai mennyiségek – egy robbantásos cselekmény kapcsán például: nyomás, hőmérséklet, impulzus, erők, feszültségek, nyomatékok, stb. –, amelyeket szintén valószínűségi változóknak tekintünk. A szóba jövő valószínűségi változók mindegyikét összefoglaljuk egy $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozóban, amelynek egyes X_i komponensei a kérdéses fizikai mennyiségek. Nevezzük ezeket a vizsgálat szempontjából lényeges mennyiségeket állapotváltozóknak. Ezen állapotváltozók, mint fizikai mennyiségek determinisztikus fizikai törvények alapján összefüggenek. A kérdés az, hogy a determinisztikus törvények alapján hogyan következtethetünk sztochasztikus törvényszerűségekre és ezek alapján hogyan becsülhető a kockázat.

2. BIZTONSÁGI HATÁR, HATÁRÁLLAPOT FÜGGVÉNY

Tegyük fel, hogy az X_i állapotváltozók felhasználásával előállítunk egy – a szakirodalomban rend szerint g -vel jelölt – függvényt a következő megállapodás szerint [5]. A $g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ függvény pozitív értéket vesz fel, azaz $g(\mathbf{X}) > 0$, ha a rendszer stabil, „biztonságos állapotban” van, ha tehát a rendszerre ható fizikai mennyiségek nem lépnek túl bizonyos határértékeket. Továbbá negatív, azaz $g(\mathbf{X}) < 0$, ha a rendszerre ható fizikai mennyiség(ek) meghalad(nak) bizonyos határértéke(ke)t. Ez utóbbi a rendszer azon állapota, amelyben egyes komponensek megsérülnek, használhatatlanná válnak, azaz egy komponens sérülése által a rendszer egésze sérül, meghibásodik, ez a „meghibásodás állapota”. Ez utóbbi állapotnak nyilván különböző fokozatai vannak. Mi az alábbiakban ezek között nem teszünk különbséget, kizárólag a $g(\mathbf{X}) > 0$ és $g(\mathbf{X}) < 0$ egyenlőtlenségekkel leírható állapotok különbségét, ezek közötti átmenetet, illetve pontosabban a $g(\mathbf{X}) < 0$ esemény valószínűségét fogjuk vizsgálni. Tegyük fel, hogy az \mathbf{X} vektorváltozó értelmezési tartománya az n -dimenziós \mathbf{R}^n térnek egy T tartománya. Ezen tartomány T_1 részhalmaza az, ahol $g(\mathbf{X}) > 0$, ez a „biztonsági tartomány”, az a T_2 tartomány, ahol $g(\mathbf{X}) < 0$, a „meghibásodási tartomány”. A két tartomány határa, azon pontok halmaza a T -ben amelyekre $g(\mathbf{X}) = 0$, a „biztonsági határ”. Ez a biztonsági határ egy $n - 1$ dimenziós felület \mathbf{R}^n -ben, voltaképpen az n -változós $g(\mathbf{X})$ függvény egy szintfelülete. Ha a $g(\mathbf{X})$ függvény lineáris, ez a biztonsági határ egy hipersík (egyenes, sík, hipersík), ha nem lineáris, akkor egy görbült felület (két dimenzióban egy görbe).

A $g(\mathbf{X})$ függvényt az említett tulajdonságok miatt nevezzük „határállapot függvény”-nek. Ezzel a függvénnyel írható le tehát egy rendszer – vizsgálataink szempontjából fontos – azon állapotainak halmaza, amikor a rendszer nem stabil, nem biztonságos, sérül. Ezen állapotok valószínűségének kiszámításával, pontosabban a valószínűségek becslésével foglalkozunk az alábbiakban.

Vegyük most figyelembe azt a vizsgálataink szempontjából alapvető tényét, hogy X_1, X_2, \dots, X_n általában folytonos eloszlású valószínűségi változók. Alapvető kérdés, hogy milyen

módon számítható a sérülés, meghibásodás valószínűsége. Legyen $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ az X_1, X_2, \dots, X_n valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye. Ekkor a „meghibásodás” – amelyet jelölhetünk S -sel, mint az elkövetők szempontjából „Sikeres” eseményt –, valószínűsége

$$P(S) = \int_{g(X) \leq 0} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.1)$$

A valószínűséget tehát az együttes sűrűségfüggvény T_2 „meghibásodási tartomány”-ra kiterjesztett integráljával kapjuk. Ennek az integrálnak az egzakt analitikus kiszámítása gyakran nehézségekbe ütközik, sőt esetenként lehetetlen. A kockázatelemzés fő feladata azonban éppen ennek a valószínűségnek a közelítő kiszámítása, becslése. A probléma megoldására több módszer alkalmazható, az egyik a szakirodalomból jól ismert Monte Carlo szimuláció. Ez az eljárás az analitikusan meghatározhatatlan valószínűség értékét közelíti, gyakorlatilag tetszőleges pontossággal. Ebben a dolgozatban azonban egy minőségileg különböző módszert, a már említett és az alábbiakban részletesen bemutatott „megbízhatósági index” fogalmát és alkalmazását mutatjuk be.

3. KÉTVALTOZÓS, LINEÁRIS HATÁRÁLLAPOT FÜGGVÉNY

Tekintsük most azt a legegyszerűbb esetet, amikor mindössze két állapotváltozónk van: X_1 és X_2 . Az X_1 jelölje a rendszert érő valamilyen fizikai hatást (nyomás, feszültség, erő, nyomaték, impulzus, stb.). Az X_2 pedig jelöli a „kapacitást” mint fizikai jellemzőt, vagyis egy olyan karakterisztikus fizikai mennyiség maximális értékét, amely alapvetően befolyásolja egy rendszer stabilitását (szakítószilárdság, folyási határ, egy rezgő rendszernél a maximálisan megengedhető kitérés, stb.). Természetesen az említett mennyiségeknek összehasonlíthatóknak kell lenni, hiszen ugyanazon mértékegységgel leírható mennyiségekre vonatkozó két adatról van szó. Ebben a legegyszerűbb esetben a határállapot függvény nyilván a $g(X_1, X_2) = X_2 - X_1$ definícióval adható meg. Ha $g(X_1, X_2) > 0$ akkor $X_2 > X_1$, a kapacitás nagyobb, mint a hatás, tehát a rendszer stabil, ha viszont $g(X_1, X_2) < 0$ akkor $X_2 < X_1$, a hatás nagyobb, mint a kapacitás, tehát a rendszer sérül [6].

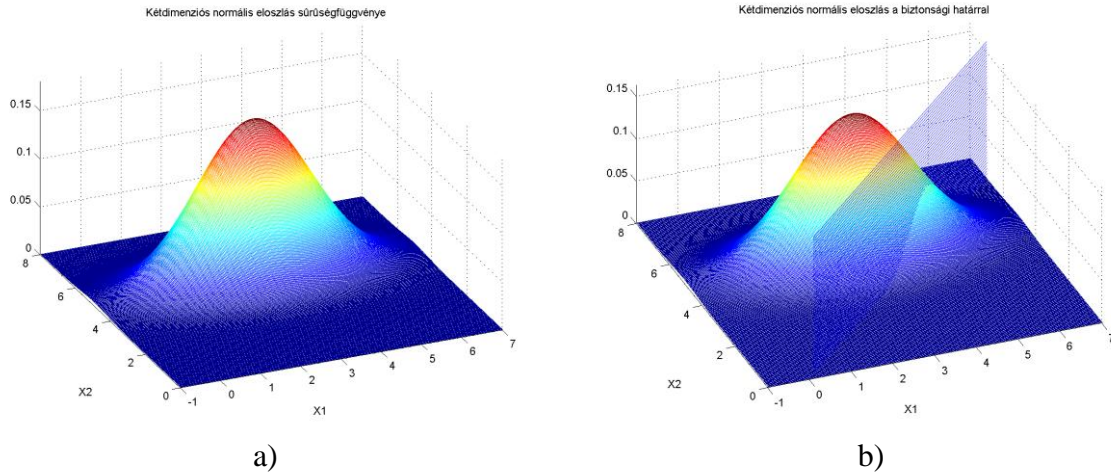
Konkrét példaként tekinthetjük a következőket:

1. Az X_1 jelentheti például egy épület homlokzati üveglemez tábláinak rezgésállapotában az elviselhető maximális kitérést, X_2 pedig egy robbantásos cselekmény során keletkező lökéshullám által gerjesztett rezgés maximális kitérését.
2. Az X_1 jelentheti egy épület acélból készült szerkezeti elemének folyási határát, az X_2 pedig szintén egy robbantásos cselekmény során keletkező lökéshullám által okozott, szerkezeti elemekben ébredő feszültséget. Stb.

Ezeket a fizikai mennyiségeket a gyakorlatban leggyakrabban normális eloszlással modellezünk. (Később megvizsgáljuk azt az esetet, ha nem normális eloszlással írjuk le a fizikai mennyiségeket.) Legyen tehát az X_1 eloszlása $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ az X_2 eloszlása pedig $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Ebben az esetben feltesszük, hogy a két valószínűségi változó független, amely feltevés az 1. és 2. példabeli változókra természetesen egzaktul igaz is. (A korrelált valószínűségi változók esetét később tárgyaljuk.) Ebben az esetben az együttes sűrűségfüggvény az egyes perem sűrűségfüggvények szorzata.

Térjünk rá az általános, 2-dimenziós lineáris függvény vizsgálatára. Használjuk fel azt az ismert tényt, hogy ha X_1 és X_2 normális eloszlású, akkor tetszőleges a_1 és a_2 konstansok esetén az $a_1 X_1 + a_2 X_2$ valószínűségi változó is normális eloszlású [7]. Melynek paraméterei, az X_1 és X_2 változók paramétereire vonatkozó jelölések felhasználásával: $\mu = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2$ valamint $\sigma^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2$. Ez azt jelenti a konkrét esetben, hogy a $g(X_1, X_2) = X_2 - X_1$ függvénnyel

definiált valószínűségi változó is normális eloszlású, paraméterei pedig: $\mu = \mu_2 - \mu_1$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Konkrét adatok alkalmazásával szemléltetjük a mondottakat: legyen az X_1 eloszlása $N(3; 1, 4^2)$ az X_2 eloszlása pedig $N(5; 0, 7^2)$. Az a) ábrán látható az együttes sűrűségfüggvény.



1. ábra. Kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye¹

Feltesszük a kérdést: Mi a $g(X_1, X_2) < 0$ esemény bekövetkezésének valószínűsége? A b) ábra alapján ez szemléletesen a következő: Az $X_2 - X_1 = 0$ síktól „jobbra” eső, az $X_2 < X_1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő tartományon az együttes sűrűségfüggvény alatti térrész térfogata. Mivel normális eloszlásról van szó, ennek a valószínűségnek a kiszámítása egzaktul a következő:

$$P(S) = P(g(X_1, X_2) < 0) = F(0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (3.1)$$

ahol F jelöli az $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlás eloszlásfüggvényét, Φ pedig a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét [8]. Mint látszik a kérdésre adandó válasz, tehát a „meghibásodás” valószínűsége alapvetően függ a $\frac{\mu}{\sigma}$ hányadostól (amely hányados a $\frac{\sigma}{\mu}$ „relatív szórás” vagy más néven „variációs együttható” reciproka). Alapvető jelentősége miatt külön elnevezéssel jelöljük meg: **Megbízhatósági index**nek nevezzük és β -val jelöljük [5,6], $\beta = \frac{\mu}{\sigma}$. Abban az esetben, amikor az egyes valószínűségi változók normális eloszlással írhatók le és a határállapot függvény lineáris, a nemkívánatos esemény valószínűsége egyszerűen és egzaktul számítható:

$$P(S) = P(g(X_1, X_2) < 0) = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (3.2)$$

Azonnal általánosítjuk az eredményt arra az esetre, amikor a határállapot függvény lineáris, azaz $g(X_1, X_2) = a_1X_1 + a_2X_2$ alakú. Ebben az esetben a valószínűséget pontosan ugyanaz a formula szolgáltatja csak a μ és σ paraméterek konkrét előállítására más:

¹ Az ábrákat a szerző készítette MATLAB szoftver segítségével.

$$P(S) = P(g(X_1, X_2) < 0) = F(0) = \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \Phi(-\beta) = \Phi\left(-\frac{a_1\mu_1 + a_2\mu_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2}}\right) \quad (3.3)$$

A β megbízhatósági indexnek igen szemléletes a jelentése. Az alábbiakban ezt mutatjuk meg.

Standardizáljuk az X_1 és X_2 normális eloszlású valószínűségi változókat. Jelölje rendre Z_1 és Z_2 a standardizált változókat:

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}; Z_2 = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}; \quad (3.4)$$

Ha ezeket átrendezzük az eredetileg definiált változókra a következő adódik:

$$X_1 = \sigma_1 Z_1 + \mu_1; X_2 = \sigma_2 Z_2 + \mu_2 \quad (3.5)$$

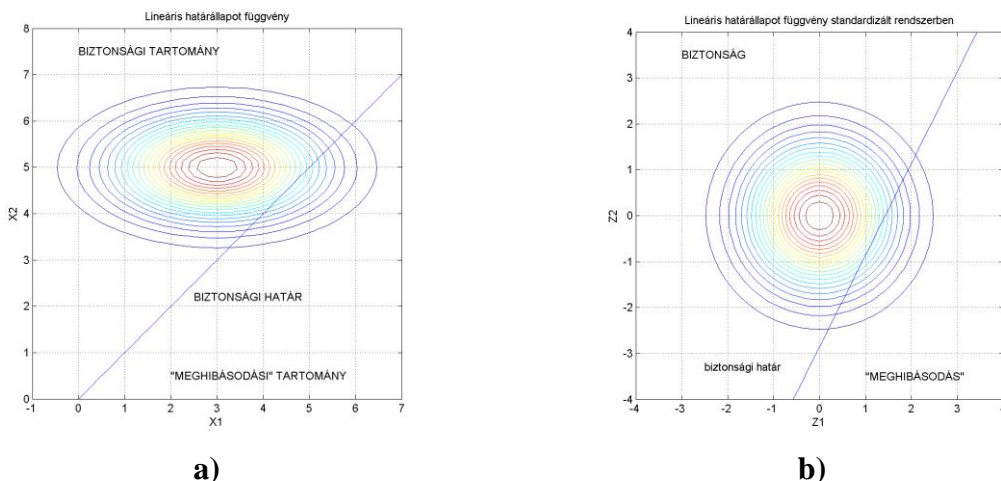
Írjuk most fel a g függvényt a standardizált változókkal. Jelölje ezt a függvényt g' . A bevezetőben említett konkrét példa esetében ekkor azt kapjuk, hogy

$$g'(Z_1, Z_2) = \sigma_2 Z_2 - \sigma_1 Z_1 + (\mu_2 - \mu_1), \quad (3.6)$$

az általános lineáris függvény esetében pedig:

$$g'(Z_1, Z_2) = a_1(\sigma_1 Z_1 + \mu_1) + a_2(\sigma_2 Z_2 + \mu_2) = a_1\sigma_1 Z_1 + a_2\sigma_2 Z_2 + (a_1\mu_1 + a_2\mu_2). \quad (3.7)$$

Amelyek (természetesen) mindkét standardizált változóban ugyancsak lineáris függvények. Irányítsuk most figyelmünket a g' függvény $g'(\mathbf{Z}) = 0$ szintvonalára. A linearitás miatt ez a szintvonal egy egyenes. Tegyük szemléletessé a problémát egy ábrával. Ehhez vegyük alapul az ábrán már alkalmazott $N(3; 1, 4^2)$ illetve $N(5; 0, 7^2)$ normális eloszlásokat.



2. ábra. Lineáris határállapot függvény kétdimenziós normális eloszlás esetén
a) az eredeti; b) a standardizált koordinátarendszerben.²

² Az ábrákat a szerző készítette MATLAB szoftver segítségével.

Világos, hogy a 2. ábrán az 1. ábra kétdimenziós eloszlásának szintvonalas ábrázolása látható. Tűzzük ki most a következő feladatot: Határozzuk meg a $\sigma_2 Z_2 - \sigma_1 Z_1 + (\mu_2 - \mu_1) = 0$ egyenletű egyenesnek az origótól mért távolságát. Pont és egyenes távolsága azonnal adódik, ha az egyenes normálegyenletébe – vagyis az egységnyi hosszúságú normálvektorral adott egyenletébe – behelyettesítjük az adott pont koordinátáit. Mivel ennek az egyenesnek a normálvektora $\mathbf{n}(-\sigma_1, \sigma_2)$, a normálvektor hossza $|\mathbf{n}| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Ebből következően a biztonsági határt jelentő egyenes normálegyenlete

$$\frac{\sigma_2 Z_2 - \sigma_1 Z_1 + (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 0 \quad (3.8)$$

Ha ebbe helyettesítjük az origó $(Z_1; Z_2) = (0; 0)$ koordinátáit, azt kapjuk, hogy annak távolsága az egyenestől:

$$d(\text{origó, egyenes}) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \beta \quad (3.9)$$

Azt kaptuk, hogy ez a távolság éppen a β megbízhatósági index. Arra jutottunk tehát, hogy a β megbízhatósági index szemléletes tartalma a következő: a standardizált koordináta-rendszerben az origó és a biztonsági határ – amely ebben az esetben egyenes – közötti **minimális távolság**.

Az általánosabb lineáris esetet alapul véve a normálegyenlet, és a megbízhatósági index rendre a következő:

$$\frac{a_1 \sigma_1 Z_1 + a_2 \sigma_2 Z_2 + (a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2)}{\sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2}} = 0; \quad \beta = \min_{(Z_1, Z_2) \in \text{egyenes}} d(\text{origó, egyenes}) = \frac{a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2}{\sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2}} \quad (3.10)$$

A vizsgált konkrét példában:

$$\beta = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{5 - 3}{\sqrt{1,4^2 + 0,7^2}} = 1,2778 \quad (3.11)$$

Ami azt jelenti, hogy az adott esetben a „meghibásodás”, tehát a nemkívánatos esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(S) = P(g(x_1, x_2) < 0) = \Phi(-\beta) = \Phi(-1,2778) = 1 - \Phi(1,2778) = 0,1007 \quad (3.12)$$

Tájékoztatásul az alábbi táblázat tartalmazza a β index és a megfelelő valószínűség értékét néhány esetben:

β	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6
P	0,3085	0,1587	0,0668	0,0228	0,0062	0,0013	$3,16 \cdot 10^{-5}$	$2,86 \cdot 10^{-7}$	$9,86 \cdot 10^{-10}$

1. táblázat: A megbízhatósági index és a valószínűség kapcsolata

A szemlélet alapján adódó következtetést azonnal levonhatjuk: Minél közelebb helyezkedik el a biztonsági határ egyenese az origóhoz a standardizált koordináta rendszerben, annál

nagyobb a nemkívánatos esemény bekövetkezésének a valószínűsége, a távolság növekedésével azonban ez drasztikusan csökken. Itt utalhatunk a mérnöki tervezés folyamatában arra a pontra, hogy olyan fizikai jellemzőkkel kell egy épület/építményt létrehozni, hogy a β értéke a lehetőségek szerint minél nagyobb legyen, ugyanis minél nagyobb a β értéke az épület/építmény annál biztonságosabb.

Kétdimenziós lineáris határállapot függvény esetén a fenti módon kiszámítható a kockázat valószínűsége, de természetes módon felmerül az a kérdés is, hogy az X_1 és X_2 valószínűségi változók mely értéke esetén valósul meg ez a helyzet. A transzformált Z_1 és Z_2 változókra lefordítva a kérdés az, hogy az egyenes mely pontja van a legközelebb az origóhoz. Adjuk meg ezen pont koordinátáit. Ha ez már a kezünkben van a (3.5) alapján könnyen visszatérhetünk az eredeti valószínűségi változókra. A keresett pontnak kitüntetett szerepe van a kockázatelemzés szempontjából, ugyanis ez a „legvalószínűbb meghibásodás” helye, ezért a tervezésnél külön tekintettel kell lenni erre a pontra. A neve „tervezési pont” [5,6].

A tervezési pont meghatározható feltételes szélsőérték problémaként Lagrange módszerrel, azonban nem ezt alkalmazzuk, két ok miatt. Az egyik ok, hogy az általános esetben, amikor a határállapot függvény nem lineáris, a módszer analitikusan általában nem kivitelezhető, helyette iterációs algoritmust alkalmazhatunk, tehát numerikus számítógépes programot, ezt az alábbiakban bemutatjuk. A másik ok pedig az, hogy két dimenzióban a tervezési pont a szemlélet alapján, egyszerű elemi geometriai módszerekkel adódik.

A $(Z_1; Z_2)$ koordináta-rendszerben az egyenes origóhoz legközelebbi pontja úgy adódik, hogy a (3.7) egyenest elmetsszük az origóra illeszkedő és (3.7)-re merőleges egyenessel. Ennek a merőlegesen metsző egyenesnek az egyenlete például a következő:

$$a_2\sigma_2 Z_1 - a_1\sigma_1 Z_2 = 0. \quad (3.13)$$

A (3.7)-ből adódó $g'(\mathbf{Z}) = 0$ és a (3.13) egyenletekből álló rendszer megoldása pedig:

$$Z_1 = -\frac{a_1\sigma_1(a_1\mu_1 + a_2\mu_2)}{a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2}; \quad Z_2 = -\frac{a_2\sigma_2(a_1\mu_1 + a_2\mu_2)}{a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2}. \quad (3.14)$$

Ha innen (3.5) alapján áttérünk az X_1 és X_2 valószínűségi változókra, akkor kapjuk a tervezési pont koordinátáit, vagyis az X_1 és X_2 valószínűségi változók azon összetartozó értékpárját, amely esetén a legnagyobb a nemkívánatos esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$X_1 = -a_1\sigma_1^2 \frac{(a_1\mu_1 + a_2\mu_2)}{a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2} + \mu_1; \quad X_2 = -a_2\sigma_2^2 \frac{(a_1\mu_1 + a_2\mu_2)}{a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2} + \mu_2. \quad (3.15)$$

Abban a legegyszerűbb és ezért a gyakorlat számára is legfontosabb esetben amikor a határállapot függvény a $g(X_1, X_2) = X_2 - X_1$ definícióval van adva, a (3.14) megoldásoknak megfelelő standardizált koordináták a következők:

$$Z_1 = \frac{\sigma_1(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \quad Z_2 = \frac{\sigma_2(\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (3.16)$$

Innen pedig a (3.5) transzformációs formulák adják a tervezési pont koordinátáit:

$$X_1 = \sigma_1^2 \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \mu_1; \quad X_2 = \sigma_2^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \mu_2. \quad (3.17)$$

A (3.17) képletekbe történő helyettesítéssel kapjuk a 2. ábrán szemléltetett konkrét példában a tervezési pontot:

$$X_1 = 1,4^2 \frac{(5-3)}{1,4^2 + 0,7^2} + 3 = 4,6; \quad X_2 = 0,7^2 \frac{(3-5)}{1,4^2 + 0,7^2} + 5 = 4,6. \quad (3.18)$$

4. TÖBBDIMENZIÓS, LINEÁRIS HATÁRÁLLAPOT FÜGGVÉNY

Vizsgáljuk most, ugyancsak normális határeloszlások esetén, a legáltalánosabb alakú lineáris függvény esetét. Tegyük fel, hogy az X_1, X_2, \dots, X_n valószínűségi változók normális eloszlásúak, a határállapot függvény pedig a következő:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (4.1)$$

Mivel az X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók normális eloszlásúak és a g lineáris függvény, a belőlük képezett $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ valószínűségi változó is normális eloszlású. Ha alkalmazzuk az $E(X_i) = \mu_i$ és $D^2(X_i) = \sigma_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) jelöléseket, ennek várható értéke az alábbi formulával számítható:

$$\mu = E(g(X_1, X_2, \dots, X_n)) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad (4.2)$$

A szórás attól függ, hogy az X_i valószínűségi változók korreláltak-e.

a) Ha az X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók páronként korrelálatlanok, akkor a szórásnégyzetet az alábbi összefüggéssel számíthatjuk:

$$\sigma^2 = D^2(g(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \quad (4.3)$$

b) Ha viszont az X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók nem függetlenek, akkor a szórásnégyzet (4.3) helyett a következő, általánosabb összefüggéssel van adva [8]:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i,j,i \neq j} \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j \quad (4.4)$$

ahol ρ_{ij} az X_i és X_j valószínűségi változók korrelációs együtthatója, azaz

$$\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = Cov(X_i, X_j); \quad i \neq j \quad (4.5)$$

A „meghibásodási tartomány”-t ebben az általánosabb esetben is a $g(X_1, \dots, X_n) < 0$ egyenlőtlenséggel definiáljuk. Ha F jelöli a g valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvényét, akkor a „nemkívánatos esemény” bekövetkezésének a valószínűsége, és egyben a (3.3) összefüggés általánosítása a következő:

$$P(S) = P(g(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0) = F(0) = \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \Phi(-\beta) \quad (4.6)$$

A különbség annyi, hogy ebben az általánosabb esetben a μ és σ paramétereket a (4.3) és (4.4) illetve (4.5) formulák szolgáltatják. A „nemkívánatos esemény” valószínűsége tehát

$$P(S) = \Phi \left(- \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2}} \right) \quad (4.7)$$

A lineáris biztonsági határ most a

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i = 0 \quad (4.8)$$

lineáris egyenlettel adott hipersík. Az n -dimenziós Euklideszi-terekben definiált távolság-fogalom szerint a β megbízhatósági index a (3.8) és (3.9) kétdimenziós összefüggések n -dimenziós általánosítása alapján, ugyancsak (4.8) hipersík standardizált koordináta-rendszerbeli transzformáltjának és az origónak a legkisebb távolsága.

Hátra van még a tervezési pont meghatározása. Ebben a pontban is elkerüljük a Lagrange-féle szélsőérték probléma analitikus megoldását. Ehelyett olyan eljárást választunk, amely alkalmazható – iteratív környezetben – a nemlineáris esetben is. Használjuk fel a gradiens vektor szemléletes jelentését, amely szerint a gradiens a szintfelületre merőlegesen a függvény legintenzívebb növekedésének irányába mutat. A (4.8) hipersíkot transzformáljuk a (3.3) és (3.4) formulákkal a standard koordináta-rendszerbe, így kapjuk a g' függvényt:

$$g'(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (\sigma_i Z_i + \mu_i) = 0 \quad (4.9)$$

A (4.9) hipersík g' függvény egy szintfelülete. A g' gradiense, a $\nabla g'$ vektor erre a síkra merőlegesen az értelmezés szerint a biztonsági tartományba mutat. Eszerint a gradiens ellentettje mutat a „meghibásodási tartomány”-ba. Az origóból felmérjük a $-\nabla g'$ vektor t -szeresét úgy, hogy a vektor végpontja illeszkedjen a hipersíkra. Ez a hipersíkbeli pont a keresett tervezési pont. (4.9) alapján a gradiens ellentettje a

$$-\nabla g'(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = (-a_1 \sigma_1, \dots, -a_n \sigma_n) \quad (4.10)$$

vektor. Ha ennek t -szeresét helyettesítjük (4.9)-be

$$a_0 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 t + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i = 0 \quad (4.11)$$

megkapjuk azt a t paraméter értéket, amellyel szorozva a negatív gradienst, éppen a tervezési pontot kapjuk:

$$t = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2} \quad (4.12)$$

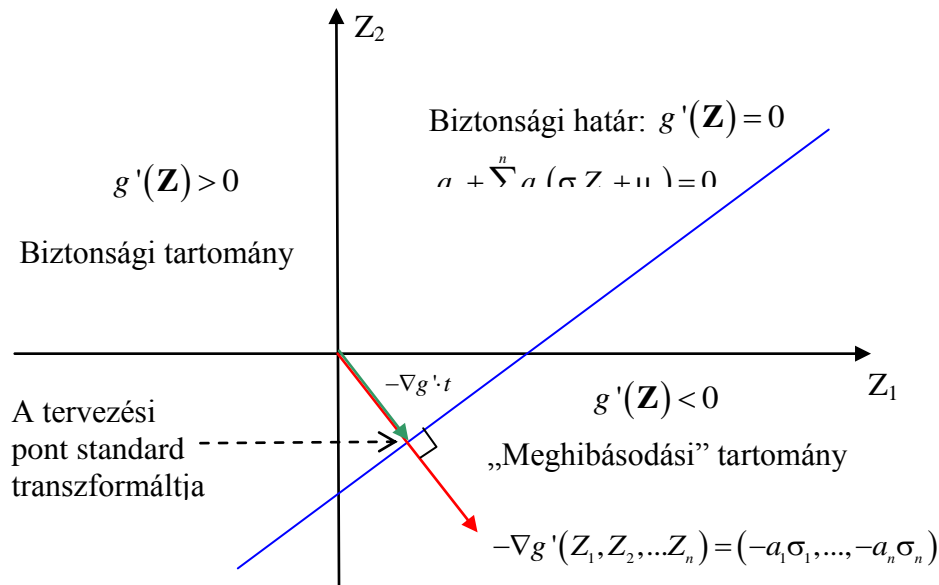
Innen a tervezési pont koordinátái a standard koordináta-rendszerben a következők:

$$Z_i = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2} (-a_i \sigma_i); \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.13)$$

Végül pedig (3.4) alapján megkapjuk a tervezési pont koordinátáit az eredeti valószínűségi változókra vonatkoztatva:

$$X_i = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2} (-a_i \sigma_i^2) + \mu_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.14)$$

A számítások menetének megvilágítását szolgálja – természetese csak 2 dimenzióban – a 3. ábra.



3. ábra. Többdimenziós lineáris határállapot függvény esetén a tervezési pont meghatározása negatív gradiens segítségével³

5. NEMLINEÁRIS HATÁRÁLLAPOT FÜGGVÉNY

Ebben a pontban megvizsgáljuk a legáltalánosabb, nemlineáris esetben a megbízhatósági index és ezzel a kockázat kiszámításának, illetve pontosabban a becslésének a módját. Legyen tehát a $g(X_1, \dots, X_n)$ határállapot függvény teljesen általános alakú, ne éljünk semmiféle megszorító feltevessel. Ekkor általában egzakt módon nem határozható meg a β index, csak közelítőleg számíthatjuk. A közelítésre két lehetőséget mutatunk be.

1. lehetőség: Közelítés Taylor-sorral. Természetes módon merül fel a lehetőség, hogy a függvényt fejtsük hatványsorba egy alkalmas pont, legnyilvánvalóbban a várható érték körül, majd tartsuk meg a sor lineáris részét. A másodrendű Taylor-polinom a következő:

$$g(\mathbf{X}) \approx g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (X_i - \mu_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) + \dots \quad (5.1)$$

³ Az ábrát a szerző készítette

Ha itt közelítésképpen megtartjuk a sor legfeljebb elsőrendű tagjait és bevezetjük az $a_0 = g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ és $a_i = \frac{\partial g}{\partial X_i}$; ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) jelöléseket, akkor változtatás nélkül, betű szerint alkalmazhatjuk a 4. pontban mondottakat. Hangsúlyozzuk azonban, hogy csak közelítő jellegű megoldást kapunk. Innen nyilvánvaló, hogy az elsőrendű közelítés esetén a várható érték közelíthető a

$$\mu = g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad (5.2)$$

formulával. A szórásnégyzet pedig – a hibaterjedés törvényei szerint [9] –, attól függ hogy az X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók páronként függetlenek vagy pedig nem. Ha páronként függetlenek, akkor a szórásnégyzetet a

$$\sigma^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_i^2 \quad (5.3)$$

képlet, ha viszont nem függetlenek, akkor a

$$\sigma^2 \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} Cov(X_i, X_j) \quad (5.4)$$

összefüggés szolgáltatja [7,8]. Innen a megbízhatósági index és a kockázat becsült értéke (4.6) és (4.7) alapján, a tervezési pont közelítő helyzete pedig (4.14) alapján adódik.

2. lehetőség: *Iteráció alkalmazása.* Az 1. lehetőséghez képest lényegesen pontosabb megoldás adódik, ha az (5.1-4) formulák helyett numerikus módon, iterációval számítjuk a β értékét és ezzel párhuzamosan a tervezési pont koordinátáit. Az iteráció voltaképpen egy – már többször említett, de analitikusan meg nem oldott – feltételes szélsőérték probléma megoldását szolgáltatja. A szélsőérték feladat a következő:

$$\beta = \min_{Z \in \{Z | g(Z)=0\}} \sqrt{\sum_{i=1}^n Z_i^2} \quad (5.5)$$

Az iteráció azonban nem a Lagrange módszert követi végig, hanem a 4. pontban bemutatott „negatív gradiens módszer” általánosítása a nemlineáris esetre. Ehhez bevezetésként arra kell hivatkoznunk, hogy a negatív gradiens irányába mutató, *egységnyi hosszúságú* vektor komponensei a következő módon adható meg:

$$e_i = - \frac{\frac{\partial g'}{\partial Z_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g'}{\partial Z_i} \right)^2}}; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (5.6)$$

(Az „e” jelöléssel arra utaltunk, hogy egységnyi hosszúságú vektorról van szó.) Az iteráció ezek után például a következő lépésekből állhat:

1. lépés: Választunk egy pontot a felületen, amelyet úgy tekintünk mint egy e egységvektor β -szorosa. A kapott β a megbízhatósági index kezdőértéke, az e pedig a negatív gradiens kezdőértéke.

2. lépés: Ebből az \mathbf{e} vektorból és β index-ből kiindulva kiszámítjuk a $\frac{\partial g'}{\partial Z_i}$ deriváltakat a $\beta \mathbf{e}$ helyen, majd (5.6) alapján megadjuk az \mathbf{e} egységvektor egy újabb közelítését:

$$e_i = -\frac{\frac{\partial g'}{\partial Z_i}(\beta \mathbf{e})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g'}{\partial Z_i}(\beta \mathbf{e})\right)^2}}; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (5.7)$$

3. lépés: Az \mathbf{e} egységvektor frissített értékéből kiindulva megoldjuk a

$$g'(\beta e_1, \beta e_2, \dots, \beta e_n) = 0 \quad (5.8)$$

egyenletet β -ra, ami a megbízhatósági index egy jobb közelítése, majd ismét alkalmazzuk az 1. lépést és így tovább. Hangsúlyozzuk, hogy az (5.8) egyenlet egyben a tervezési pont transzformáltját is szolgáltatja, arról (3.5) alapján térhetünk át az eredeti valószínűségi változókra.

4. lépés: A vizsgált probléma megköveteli a β index adott pontossággal történő meghatározását. Ezt figyelembe vehetjük megállási kritériumként. Előírhatjuk, hogy az algoritmusnak akkor van vége, ha például $|\beta^{(k+1)} - \beta^{(k)}| < \varepsilon$, ahol ε adott hibakorlát. A felső index az iteráció sorszámát jelöli.

A mondottak illusztrálására tekintsük a következő példát. Legyen az X_1 valószínűségi változóra vonatkozólag a két jellemző adat $(\mu_1; \sigma_1) = (10; 5)$, az X_2 változó jellemzői pedig legyenek $(\mu_2; \sigma_2) = (20; 6)$, a határállapot függvényt pedig definiáljuk a nemlineáris $g(X_1; X_2) = X_2^2 - X_1$ függvénnyel. Ha áttérünk a standard eloszlásra, akkor az adódik, hogy

$$g'(Z_1, Z_2) = (20Z_2 + 6)^2 - (10Z_1 + 5) = 400Z_2^2 + 240Z_2 + 36 - 10Z_1 - 5 \quad (5.9)$$

A gradiens vektorhoz szükség van a parciális deriváltakra:

$$\frac{\partial g'}{\partial Z_1} = -10; \quad \frac{\partial g'}{\partial Z_2} = 800Z_2 + 240. \quad (5.10)$$

Ezeket a deriváltakat (5.7) szerint számolni kell a $\beta \mathbf{e}$ helyen:

$$\frac{\partial g'}{\partial Z_1}(\beta \mathbf{e}) = -10; \quad \frac{\partial g'}{\partial Z_2}(\beta \mathbf{e}) = 800\beta e_2 + 240. \quad (5.11)$$

A kapott gradiens vektor hossza a következő formulával számítható:

$$\|\nabla g'\| = \sqrt{100 + (800\beta e_2 + 240)^2}. \quad (5.12)$$

Az \mathbf{e} egységvektor koordinátáit ezek után az alábbi hányadosok szolgáltatják:

$$e_1 = \frac{10}{\sqrt{100 + (800\beta e_2 + 240)}}; \quad e_2 = -\frac{800\beta e_2 + 240}{\sqrt{100 + (800\beta e_2 + 240)}}. \quad (5.13)$$

Felhívjuk a figyelmet az előjelváltásra, ugyanis emlékeztetünk rá, hogy negatív gradiensekre van szükség! A tervezési pontnak rajta kell lennie a felületen, ezt biztosítja az (5.8) egyenlet megfelelője:

$$g'(\beta e_1, \beta e_2) = 400\beta^2 e_2^2 + 240\beta e_2 + 36 - 10\beta e_1 - 5 = 0 \quad (5.14)$$

Innen kifejezve β -t kapjuk a megbízhatósági index egy újabb közelítését:

$$\beta = \frac{-31}{400\beta e_2^2 + 240e_2 - 10e_1} \quad (5.15)$$

Az iterációhoz kezdőértékeket például az (5.14) egyenletből kaphatunk. Legyen példaként $\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Ha ezt helyettesítjük, β -ra vonatkozólag egy egyszerű másodfokú egyenlet adja β kezdőértékét.

6. KORRELÁLT VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

A gyakorlatban előfordul, hogy korrelált valószínűségi változókkal kell dolgozni a kockázatbecslés során. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez az eset visszavezethető a korrelálatlan, standard normális eloszlásokkal történő számításokra. Az eddigiekben is az történt, hogy az X_i normális eloszlású változókról áttértünk a Z_i standard eloszlásokra. Ha a változók korreláltak, akkor még egy lépést teszünk, beiktatunk egy olyan lineáris transzformációt is, amely a korrelált változókat korrelálatlanokká teszi. Induljunk ki az \mathbf{X} vektorváltozó kovariancia mátrixából [10]:

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & Cov(X_1; X_2) & \dots & Cov(X_1; X_n) \\ Cov(X_2; X_1) & \sigma_2^2 & \dots & Cov(X_2; X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(X_n; X_1) & Cov(X_n; X_2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

ahol az értelmezés szerint $\mathbf{C}_x = E(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T)$, E jelöli a várható értéket, \mathbf{X}^T pedig az \mathbf{X} vektor transzponáltját. Ha a mátrixnak csak a főátlójában szerepelnek 0-tól különböző komponensek akkor a valószínűségi változók páronként korrelálatlanok. Ha a kovarianciák helyett a korrelációs együtthatókat írjuk egy mátrixba, akkor kapjuk a korrelációs együttható mátrixot:

$$\boldsymbol{\rho}_x = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

A standardizálás során, amikor a (3.4) összefüggések szerint áttérünk a standard normális eloszlású Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) változókra, a várható érték zérus, a szórás egységnyi lesz. Tekintettel arra, hogy $\rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = \text{Cov}(X_i, X_j)$, világos, hogy a \mathbf{Z} vektorváltozó kovariancia mátrixa egybeesik az \mathbf{X} vektorváltozó korrelációs mátrixával: $\mathbf{C}_z = \boldsymbol{\rho}_x$.

Vizsgáljuk most a \mathbf{C}_z szimmetrikus mátrixot. A numerikus lineáris algebra egyik alaptétele a Cholesky-felbontás lehetősége [10], amely szerint \mathbf{C}_z felbontható egy alsó és egy felső háromszögmátrix szorzatára, amely mátrixok egymás transzponáltjai: $\mathbf{C}_z = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$. Cél egy olyan \mathbf{U} vektorváltozó előállítása, amelynek komponensei páronként függetlenek. Igazoljuk, hogy a $\mathbf{Z} = \mathbf{LU}$ szorzat alapján definiált \mathbf{U} vektor ennek a kritériumnak eleget tehet az alábbiak szerint. A kovariancia definíciója szerint ugyanis

$$\mathbf{C}_z = E(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^T) = E(\mathbf{LUU}^T \mathbf{L}^T) = \mathbf{L} \cdot E(\mathbf{UU}^T) \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{LL}^T = \boldsymbol{\rho}_x \quad (6.3)$$

Az $E(\mathbf{UU}^T)$ várható érték, azaz kovariancia mátrix a követelmények miatt egységmátrix. Ebből következően látszik, hogy \mathbf{L} akkor felel meg transzformációs mátrixnak, ha teljesül, hogy $\mathbf{LL}^T = \boldsymbol{\rho}_x$. Ez viszont egy könnyen megoldható rendszer a \mathbf{L} komponenseire vonatkozólag, ugyanis mint már hangsúlyoztuk, \mathbf{L} alsó háromszögmátrix. Írjuk fel a kérdéses szorzatot mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & L_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Innen már jól láthatóan felírható a szükséges számú egyenlet az \mathbf{L} mátrix kérdéses $n(n+1)/2$ számú ismeretlen komponensére:

$$\begin{aligned} L_{11} \cdot L_{11} &= 1; \\ L_{11} \cdot L_{21} &= \rho_{12}; \\ L_{21} \cdot L_{21} + L_{22}^2 &= 1; \dots \text{ stb.} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Tekintsük példaképpen az 5. pontban szereplő X_1 és X_2 valószínűségi változókat az 5. ponthoz képest a különbséggel, hogy feltesszük: X_1 és X_2 korrelált. Tegyük fel az illusztráció érdekében, hogy a korrelációs együttható mátrixuk a következő:

$$\boldsymbol{\rho}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Ezt alapul véve kell kiszámítanunk az \mathbf{L} mátrixot az $\mathbf{LL}^T = \boldsymbol{\rho}_x$ mátrixegyenlet, illetve a (6.5) egyenletek alapján. A konkrét esetben:

$$\begin{aligned}
L_{11} \cdot L_{11} &= 1; \\
L_{11} \cdot L_{21} &= 0,4; \\
L_{21} \cdot L_{21} + L_{22}^2 &= 1; \dots \text{ stb.}
\end{aligned}
\tag{6.7}$$

Ennek a rendszernek a megoldása, tehát az L mátrix a következő:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,4 & 0,92 \end{bmatrix}
\tag{6.8}$$

A $\mathbf{Z} = \mathbf{LU}$ szorzat alapján innen már adódnak a \mathbf{Z} és \mathbf{U} komponensei közötti kapcsolatok:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,4 & 0,92 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}
\tag{6.9}$$

Koordinátánként írva:

$$Z_1 = U_1; \quad Z_2 = 0,4U_1 + 0,92U_2.
\tag{6.10}$$

Ha (3.4) szerint visszatérünk az X vektorváltozóra, akkor megkaptuk ezen vektorváltozó komponenseinek előállítását páronként korrelálatlan, standard normális eloszlású valószínűségi változókkal:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sigma_1 U_1 + \mu_1 = 5U_1 + 10; \\
X_2 &= \sigma_2 (0,4U_1 + 0,92U_2) + \mu_2 = 2,4U_1 + 5,52U_2 + 20.
\end{aligned}
\tag{6.11}$$

7. NORMÁLISTÓL ELTÉRŐ VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK KÖZELÍTÉSE NORMÁLIS ELOSZLÁSSAL

Az előző 6 pontban hangsúlyozottan normális eloszlású valószínűségi változókkal dolgoztunk. Ez a közelítés az esetek túlnyomó többségében jól alkalmazható, hiszen a legtöbb esetben csak közelítő eredményt kaphatunk mind a valószínűségekre mind pedig a kockázat értékére. Ha azonban olyan helyzet áll elő, hogy elkerülhetetlen a normálistól eltérő eloszlással való közelítés, akkor a következőt kell meggondolnunk. A korábbiakban vizsgált tervezési pont viszonylag távol kell, hogy legyen a vektorváltozó várható értékét megadó ponttól. Ha ugyanis közel van, az azt jelenti, hogy egyszerűen rosszul tervezték az épületet/építményt. Ha például a határfüggvény lineáris és az eloszlás szimmetrikus a várható értékre, és a határfüggvény illeszkedik a várható érték által kijelölt pontra, akkor a kockázat értéke pontosan 0,5. Ilyen kockázattal nem szabad épületet/építményt tervezni. Ebből következik, hogy bármilyen eloszlásról is van szó, a várható értéktől távoli tartományon szükséges az eloszlást tanulmányozni. Itt pedig megtehetjük, hogy közelítünk egy alkalmas normális eloszlással.

Tegyük fel, hogy \mathbf{X}_d a tervezési pont helyét megadó vektor. Jelölje továbbá μ_i' és σ_i' a közelítő normális eloszlások várható értékét és szórását, továbbá F_i jelölje az aktuálisan alkalmazott eloszlás eloszlásfüggvényét, f_i pedig a sűrűségfüggvényét. Ha a tervezési pont környezetében közelíteni szeretnénk normális eloszlással, akkor teljesülniük kell az eloszlás és sűrűségfüggvényre vonatkozólag a következő összefüggéseknek:

$$F_i(X_{di}) = \Phi\left(\frac{X_{di} - \mu_i'}{\sigma_i'}\right) \quad (7.1)$$

$$f_i(X_{di}) = \frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{X_{di} - \mu_i'}{\sigma_i'}\right) \quad (7.2)$$

Tekintettel arra, hogy Φ invertálható függvény, ez az egyenletrendszer megoldható az ismeretlen várható értékekre és szórásokra:

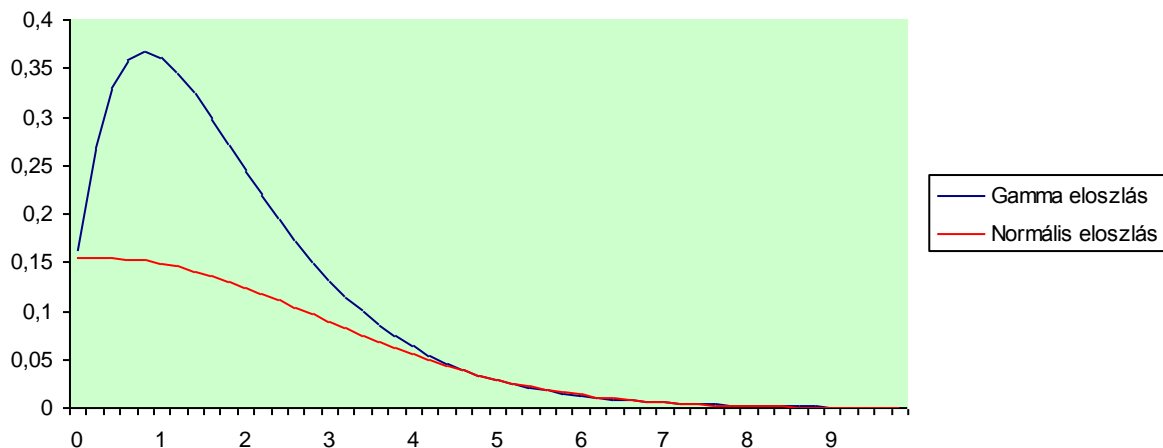
$$\sigma_i = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(F_i(X_{di})))}{f_i(X_{di})} \quad (7.3)$$

$$\mu_i = X_{di} - \sigma_i \Phi^{-1}(F_i(X_{di})) \quad (7.4)$$

A (7.3) és (7.4) formulákkal mechanikusan adódik a közelítő normális eloszlás két paramétere minden i indexre. Ha ezeket alkalmazzuk, nem normális eloszlások esetén is alkalmazhatóak az 1-6 pontokban leírt közelítő módszerek a kockázat becslésére.

A mondottak illusztrálásaképpen álljon itt egy szemléletes egydimenziós példa. Tegyük fel, hogy egy valószínűségi változót Gamma eloszlással írunk le melynek paraméterei $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Tegyük fel továbbá, hogy a tervezési pont helykoordinátája $X_d = 5$. Közelítsük ezen pont környezetében a Gamma eloszlást normális eloszlással. A (7.3) és (7.4) összefüggések szerint a közelítő normális eloszlás paraméterei: $\mu = 0,49$; $\sigma = 2,58$. Az $N(0,49; 2,58)$ és $G(2; 1)$ eloszlások sűrűségfüggvényét a 4. ábrán szemléltetjük.

Gamma eloszlás közelítése normális eloszlással



4. ábra: Gamma eloszlás közelítése normális eloszlással a tervezési pont környezetében⁴

Az ábra alátámasztja azt a tényt, hogy az adott esetben a közelítés igen jó abban a tartományban ahol helyettesíteni szeretnénk az eredeti Gamma eloszlást normális eloszlással, vagyis az $X_d = 5$ pont környezetében, sőt minden $X > 5$ esetén is.

⁴ Az ábrát a szerző készítette EXCEL táblázatkezelővel

8. ÖSSZEFOGLALÁS

A kockázatelemzés egyik legnagyobb kihívást jelentő feladata a megfelelő esemény bekövetkezési valószínűségének kiszámítása. A „kiszámítás”-ról azonban gyakran le kell mondanunk, hiszen a gyakorlatban előálló problémák kapcsán az analitikus módszerek általában csődöt mondanak. A megbízhatósági index alkalmazása éppen ennek a problémának a megoldására kiválóan alkalmas. Az eljárás normális eloszlások és lineáris határállapot függvények esetén egzaktul szolgáltatja a valószínűséget így a kockázatot. Ha a határállapot függvény nem lineáris akkor is jó közelítő módszer egyszerűsége és szemléletessége miatt. Nemlineáris esetben különös tekintettel ajánljuk az iteratív módszert az index kiszámítására, amely algoritmus egy számítógép alkalmazása esetén általában a másodperc tört része alatt eredményt ad. Külön előnye ennek, hogy az algoritmus egyben a tervezési pontot is szolgáltatja. A tervezési pont, ahogyan a neve is mutatja a tervezők, mérnökök számára hasznos információ. Tervezés során cél kell legyen, hogy a határállapot függvény és a tervezési pont távol kell legyen a várható értéket jelentő ponttól. Hasznos a módszer akkor is ha korrelált valószínűségi változókkal kell dolgoznunk és alkalmas az eljárás a normális eloszlással való közelítés adaptálására is. Az alkalmazás a céltól függ, a pontosság igényétől. A bemutatott eljárást akkor is hasznosnak tartjuk és javasoljuk a használatát, ha pontosabb módszerre van igény, ez esetben nulladik megoldásnak, esetleg egy pontosabb módszerhez kezdőértéknek, viszonyítási alapnak alkalmazhatjuk.

TÁMOP-4.2.1.B-11/2/KMR-2011-0001 Kritikus infrastruktúra védelmi kutatások. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

The project was realised through the assistance of the European Union, with the co-financing of the European Social Fund.

Irodalomjegyzék

- [1] Ezell, Bennett, Winterfeldt, Sokolowski, Collins: Probabilistic Risk Analysis and Terrorism Risk. Risk analysis, Vol. 30, No.4, 2010.
- [2] Bier, V.M., Mosleh, A.: The subjective Bayesian approach to Probabilistic Risk Assessment. Reliability Engineering and System Safety 23 (1988) 269-275.
- [3] Elisabeth Paté-Cornell, Seth Guikema: Probabilistic Modelling of Terrorist Threats: A System Analysis Approach to Setting Priorities Among Countermeasures. Military Operations Research. Vol. 7, No. 4, pp. 5-20. 2002
- [4] Seth D. Guikema, Terje Aven: Assessing risk from intelligent attacks: A perspective on approaches. Reliability Engineering and System Safety 95 (2010) 478-483.
- [5] Mark G. Stewart, Michael D. Netherton: Security risks and probability risk assessment of glazing subjects to explosive blast loading. Reliability Engineering and System Safety 93 (2008) 627-638.
- [6] David B. Chang, Carl S. Young: Probabilistic Estimates of Vulnerability to Explosive Overpressures and Impulses. Journal of physical security. 4(2), (2010) pp. 10-29
- [7] Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1981. ISBN: 963 17 5931 8
- [8] William Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó. Budapest. 1978. ISBN: 963 10 2070 3

- [9] Jánossy Lajos: A valószínűségelmélet alapjai és néhány alkalmazása: Tankönyvkiadó. Budapest. 1965
- [10] Denkinger Géza: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó. Budapest. 1989. ISBN: 963 18 1552 8
- [11] Stoyan Gisbert: Numerikus matematika. Typotex. Budapest. 2007. ISBN: 978 963 9664 41 8