

## BAYES-ANALÍZIS ALKALMAZÁSA A KOCKÁZATELEMZÉSBEN

*Absztrakt: A rendelkezésre álló adatok szerint a terrorizmus aktivitása napról-napra növekszik, különösen az utóbbi 15 évben. A terrorizmus globális problémává vált. A modern terrorizmus azonban jellegében eltér a múltbéliétől. Napjainkban a terroristáknak lehetősége van az innovatív technológiák alkalmazására. Ez merőben új kihívást jelent a védekezés szempontjából a szakemberek számára. A kockázatelemzés elmélete és módszerei alkalmazhatók arra, hogy segítségükkel becslést adjunk a terrorcselekmények bekövetkezésére és a következményekre vonatkozólag. A kockázat becslésére matematikai módszerek alkalmazhatóak, ezen belül is széleskörűen alkalmazott a valószínűségelméleti megközelítés. A legalkalmasabb elméleti háttérnek Bayes-féle következtetések elmélete mutatkozik. Ebben a dolgozatban a Bayes-tételt és alkalmazásának lehetőségeit mutatjuk be a terrorizmus fenyegetettségével kapcsolatban.*

*Kulcsszavak: Bayes-tétel, a priori - a posteriori valószínűség eloszlások, paraméterbecslés, valószínűségeloszlások frissítése, maximum a posteriori becslés.*

*Abstract: According to data, terrorist activity tends to grow steadily, especially during the past 15 years. Terrorism became a global problem. Modern terrorism differs from the terrorism of the past. Nowadays terrorists have the opportunity to use innovative technologies. According to defence and protection this is an entirely new challenge for experts. The theory of risk and methods of risk analysis can be applied to assess the risk of terrorist activity and consequences. Mathematical methods, especially the probabilistic approach are widely applied for expressing the risk. The theory of Bayesian inference seems to be extremely suitable framework for this purpose. In this work Bayes-theory and its applications will be demonstrated in the context of terrorist's threat.*

*Keywords: Bayes-theorem, prior - posterior probability distributions, parameter estimation, updating, maximum posterior estimation.*

### BEVEZETÉS

A terrorizmussal foglalkozó kutatói körökben általánosan elfogadott definíció szerint a kockázatot – bármilyen konkrét eseményre alkalmazzuk is – három tényező határozza meg: a „fenyegetettség”, a „sebezhetőség” és a lehetséges „következmények” [1]. Ezek közül az első két faktor fogható meg a valószínűségelmélet eszközeivel, a harmadik tényező elsősorban gazdasági jellegű számításokat igényel. Matematikai alakban kifejezve a kockázat ezek alapján a következő módon adható meg:

$$\text{Kockázat} = P(A) \cdot P(S|A) \cdot C \quad (1)$$

ahol az A esemény jelenti egy esetleges nemkívánatos cselekmény, egy „terrorista akció” bekövetkezését (egy adott típusú fegyver alkalmazását, a célba juttatás módját, a cél kiválasztását, stb.), P(A) ennek az eseménynek a valószínűsége. Az S jelenti az elkövetők szempontjából értékelt „siker” bekövetkezését, az A esemény, mint feltétel bekövetkezése esetén, a  $P(S|A)$  „likelihood” valószínűség pedig ennek a feltételes valószínűségnek az értéke. A C pedig jelenti a sikeres esemény következményét (okozott anyagi kár, sérültek száma, halálesetek száma, direkt vagy indirekt gazdasági hatások, pszichológiai károk, stb.)

<sup>1</sup> BALOGH Zsuzsanna, mk. alezredes, HM Hadfelszerelési és Vagyonfelügyeleti Főosztály, balogh.zsuzsanna@hm.gov.hu

<sup>2</sup> Dr. HANKA László (PhD), Óbudai Egyetem Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Kar, Mechatronikai Intézet, hanka.laszlo@gbk.uni-obuda.hu

akár anyagiakban, akár valamilyen egyéb, az esemény természetének megfelelő mérőszámmal kifejezve.

A valószínűségelmélet hatáskörébe az első két, külön-külön nem kis kihívást jelentő tényező becslése, kiszámítása tartozik. A témakörrel foglalkozó kutatói körökben, kormányhivatalokban, hírszerző hivataloknál egyre nagyobb teret nyer a matematika alkalmazása, egyre elfogadottabb a terrorizmus fenyegetéseit valószínűségi eszközökkel modellezni.

A problémakör meglehetősen összetett, azonban a matematikai modellezésre kiváló keretet szolgáltat a Bayes-féle valószínűségelmélet [2], amely különösen alkalmas a leírásra több okból is. Egyrészt lehetőséget teremt a különböző forrásokból és különböző szempontok alapján összegyűjtött adatok figyelembe vételére. Lehetővé teszi a problémakör leírását akkor is, ha viszonylag csekély mennyiségű adat áll rendelkezésre, alternatívákat szolgáltat a döntéshozók számára, rugalmasan kezeli a rendelkezésre álló adatokat, segítségével folyamatosan frissíteni lehet a modelleket az újonnan feltárt adatok alapján. Összefoglalva rugalmas és egységes keretet szolgáltat a védekezés kialakításához és ellenintézkedések tervezéséhez. Ennek az elméletnek az alkalmazását mutatjuk be a következőkben.

## TERRORCSELEKMÉNYEK KOCKÁZATÁNAK BECSLÉSE

Egy konkrét nemkívánatos esemény bekövetkezésének a valószínűségét alapvetően, nulladik megközelítésben, természetesen a gyakorisági analízis elveit követve tudjuk becsülni [3], máris hozzáteesszük, kellő mennyiségű adat birtokában.

1. Ennek leírásához tegyük fel, hogy ismereteink szerint számításba kell venni elkövetőként a  $T_j$  terroristacsoportot, illetve egyént, ahol a  $j$  index ezek számára utal. Az összes lehetőség természetesen ismeretlen, a hírszerző hivatalok feladata kideríteni, hogy egy adott cselekmény szempontjából melyek jöhetnek szóba, így válik ez az indexhalmaz konkréttá.

2. Mindegyik  $T_j$  csoport/egyén elvileg alkalmazhatja az  $F_i$  „fegyvert” amely lehet biológiai, nukleáris, piszkos bomba, hagyományos robbanótöltet, stb. Az  $i$  indexek halmazáról ugyanazt tudjuk mondani, mint az előbbieken, a konkrét fenyegetettség kapcsán kell tisztázni ezek számát és természetét.

3. Minden potenciális elkövetőnek vannak céljai, amelyet a matematikai leírás miatt számszerűsítünk valamely  $U_j$  függvénnyel, amely függvény kifejezi az adott elkövetők által kitűzött célt, valamely olyan mennyiséggel kifejezve, amely az adott elkövetők szempontjából hasznos. Ez lehet az okozott anyagi kár, a halálesetek száma, az evakuált terület nagysága, valamely rendszer működésében okozott fennakadás időtartama, stb. Ez a függvényérték tovább finomítható egy további  $k$  indexszel, aszerint, hogy egy, az elkövetők szempontjából sikeresnek tekintett eseménynek több hozadéka lehet. Így beszélhetünk ezen függvény  $X_{ijk}$  változójáról, amit az elkövetők a tervezéskor számításba vesznek. Eszerint az  $U_j$  függvény értéke ezen változóknak bizonyos  $u(X_{ijk})$  függvénye, egyszerű estben súlyozott összege. Ha  $S$  jelöli a sikeres akció bekövetkezését, akkor az  $U_j$  függvény alakja:

$$U_j(S|F_i, T_j) = \sum_k u(X_{ijk}) \quad (2)$$

Jelölje az elkövetők szempontjából tekintve  $P(S|F_i, T_j)$  a sikeres akció valószínűségét. Ekkor az elkövetők szempontjából a sikeres esemény hozadéka, „várható értéke” az

$$E(U_j|F_i, T_j) = P(S|F_i, T_j) \cdot U_j(S|F_i, T_j) \quad (3)$$

összefüggéssel adható meg. Ezek után – a gyakorisági megközelítést felhasználva – egy Tj elkövető által az Fj módszerrel/fegyverrel/szenárióval elkövetett esemény valószínűsége, tekintetbe véve az összes lehetséges szenáriót, a várható értékek arányával az alábbi módon becsülhető meg:

$$P(F_i|T_j) = \frac{E(U_j|F_i, T_j)}{\sum_i E(U_j|F_i, T_j)} \quad (4)$$

Ezek a valószínűségek jelentik a nulladik közelítés likelihood valószínűségeit. Ebben az egyenletben természetesen benne van az a feltevés, hogy egy adott elkövető/terrorcsoport egyszerre csak egy tervet készít továbbá az is, hogy az egyes szenáriók függetlenek és összegük kimeríti az összes figyelembe vehető lehetőséget, azaz hogy teljes eseményrendszer alkotnak.

4. Most következik a hírszerző szervek szerepe. Információt kell gyűjteni arról, hogy a Tj potenciális elkövető milyen valószínűséggel követ el egy cselekményt, legyen az bármilyen szenárió által leírható. Adja meg ezt a  $P(T_j)$  valószínűség. Ezek után lehetőségünk van arra, hogy megbecsüljük a Tj elkövető által Fi szenárió szerinti nemkívánatos esemény valószínűségét. A valószínűségek szorzástétele szerint:

$$P(F_i, T_j) = P(F_i|T_j) \cdot P(T_j) = \frac{E(U_j|F_i, T_j)}{\sum_i E(U_j|F_i, T_j)} \cdot P(T_j) \quad (5)$$

Itt a  $P(T_j)$  valószínűségek jelentik a probléma leírásához nulladik lépésben az a priori eloszlást. Ezek után feltehetjük a kérdést: Mi a valószínűsége annak, hogy a Tj elvető által Fi szenárió szerinti nemkívánatos esemény sikeres, azaz bekövetkezik az S esemény? Ugyancsak a szorzástétel ad erre választ:

$$P(S, F_i, T_j) = P(S|F_i, T_j) P(F_i|T_j) \cdot P(T_j) \quad (6)$$

Ebben a lépésben igen lényeges szerepe van a  $P(S|F_i, T_j)$  valószínűségeknek, amelyek igen beható vizsgálatot tesznek szükségessé. Ezek kiszámítása nem nélkülözheti az egyes szakterületek hatékony közös munkáját. Ha például arra gondolunk, hogy egy hagyományos robbanótöltettel elkövetett merénylet sikerének valószínűségét kell megbecsülni, akkor számításba kell venni az alábbiakat [4]:

- i. Milyen töltettel követik el a merényletet.
- ii. Ennek a töltetnek milyenek a kémiai tulajdonságai.
- iii. A robbanás milyen fizikai körülményeket hoz létre: a nyomás maximális értéke, ennek időbeli lefolyása, a lökéshullám intenzitása, a lökéshullám időtartama, stb.
- iv. Erre a hatásra hogyan reagálnak az épületek egyes részei, amelyek lehetnek acélból, vasbetonból vagy üvegből, esetleg fából, stb.

Mint látható, a probléma meglehetősen összetett, a kockázatbecslés folyamatában azonban nem megkerülhető. Ha ezek után tekintetbe vesszük az összes lehetséges szenáriót, akkor

kapjuk a  $T_j$  potenciális elkövető által okozott sikeres esemény valószínűségét. A teljes valószínűség tétele szerint

$$P(S|T_j) = \sum_i P(S|F_i, T_j)P(F_i|T_j) \quad (7)$$

Végül, az elemzett eredmények birtokában, ha információt gyűjtünk az összes lehetséges  $T_j$  elkövetőről a fenti módon, lehetőségünk van megbecsülni egy sikeres akció, tehát az  $S$  esemény bekövetkezésének valószínűségét. Ugyancsak a teljes valószínűség tétele szerint:

$$P(S) = \sum_j P(S|T_j)P(T_j) \quad (8)$$

Ez az a priori eloszlásból levezethető eredmény.

5. Az a priori eloszlást frissíthetjük a Bayes-tétel alapján [2]. Tegyük fel, hogy bekövetkezett egy/több „sikeres”  $S$  esemény. Az erről/ezekről szerzett információk birtokában, a Bayes-tétel alkalmazásával adódnak a  $P(T_{j_0}|S)$  a posteriori valószínűségek:

$$P(T_{j_0}|S) = \frac{P(S|T_{j_0})P(T_{j_0})}{P(S)} = \frac{P(S|T_{j_0})P(T_{j_0})}{\sum_j P(S|T_j)P(T_j)} \quad (9)$$

amelyek az a priori valószínűségek aktualizált, frissített változatának tekinthetők. Ezek, mint kiderült, újabb adatok, korábban birtokunkban nem lévő információk alapján adódtak. A formula számlálójában szereplő  $j_0$  index arra utal, hogy összegezni csak a nevezőben kell az összes lehetséges elkövetőre vonatkozólag, a  $P(T_{j_0}|S)$  valószínűség egyetlen konkrét elkövetőre vonatkozik, azonban a számításokat az összes elkövetőre el kell végezni, hiszen az a posteriori valószínűségek eloszlást alkotnak.

Ha a hangsúlyt az elkövetés módjára, tehát az  $F_i$  scenárióra helyezzük, analóg gondolatmenettel kapjuk az eredményt. Kiküszöbölhetjük a gondolatmenetből a  $T_j$  változókat, képezhetjük a határeloszlást, egy jelenleg „feleslegesnek” ítélt változó kiküszöbölésével. A kérdés ebben az esetben így hangzik: Mi a valószínűsége egy sikeres eseménynek az  $F_i$  scenárió figyelembe vételével, tekintet nélkül arra, hogy ki az elkövető? A választ a kérdésre a teljes valószínűség tétele adja:

$$P(S|F_i) = \sum_j P(S|F_i, T_j)P(F_i|T_j) \quad (10)$$

Most a  $P(F_i|T_j)$  valószínűségek tekinthetők a priori eloszlásnak. Egy sikeres esemény bekövetkezésének vizsgálata alapján ezek a valószínűségek is frissíthetők. Ismét a Bayes-tétel adja a választ arra a kérdésre, hogy hogyan változtak az a priori valószínűségek. Az a posteriori eloszlás a következő formulával írható le:

$$P(F_{i_0}|S, T_j) = \frac{P(S|F_{i_0}, T_j)P(F_{i_0}|T_j)}{P(S|F_i)} = \frac{P(S|F_{i_0}, T_j)P(F_{i_0}|T_j)}{\sum_j P(S|F_i, T_j)P(F_i|T_j)} \quad (11)$$

ahol az  $i_0$  index ismét arra utal, hogy a számlálóban nem kell összegezni, ott rögzített index szerepel. Tekintettel azonban arra, hogy egy valószínűség eloszlás az eredmény, a számítás természetesen itt is minden  $i_0$  indexre el kell végezni, ami más szóval annyit jelent, hogy minden scenárióval kapcsolatban kapunk valószínűségi információt.

A mondottak illusztrációjaképpen vizsgáljuk a következő példát. Tegyük fel, hogy egy kritikus infrastruktúra elleni terrorcselekmény kockázatát szeretnénk megbecsülni, feltéve hogy az elkövetők hagyományos robbanóanyagot (TNT) alkalmaznak. A robbanótöltetet, a tömegétől függően, többféle módon lehet a célépület/építmény közelébe juttatni. Ha a tömeg 5-10 kg, egy személy, egy kézításkában juttathatja célba, ha 50-100 kg, akkor egy motorkerékpár jöhet szóba, 250-500 kg esetén személyautóról lehet szó, 1000 kg esetén pedig egy teherautó. Mindenekelőtt információt kell gyűjtenünk ezen  $F_i$  scenáriók valószínűségét illetően. Tekintettel arra, hogy – szerencsére – magyarországi adatok nem állnak rendelkezésre, a példához az Egyesült Államok egy publikus adatbázisából vettük az adatokat [5]. Ezeket tartalmazza az 1. táblázat.

Szenáriók (kg)	F1 = 5	F2 = 10	F3 = 50	F4 = 100	F5 = 250	F6 = 500	F7 = 1000
Valószínűségek	0,25	0,25	0,15	0,15	0,1	0,05	0,05

1. táblázat: „a priori” valószínűségek

Ezzel voltaképpen a  $P(F_i)$  a priori eloszlást adtuk meg. Ezt az eloszlást szeretnénk frissíteni a tapasztalatok, megfigyelések alapján. Ez attól függ, hogy milyen nemkívánatos eseményt vizsgálunk, hogy az infrastruktúra elleni milyen természetű cselekményről van szó. Ez lehet az üvegtáblák sérülése, a vasbetonfal-elemek sérülése, fő tartószerkezeti elemek sérülése, vagy a totális kollapszus. Ezek vizsgálata beható mérnöki ismereteket, méréseket, számításokat igényel. Tegyük fel, hogy példánkban egy acélszerkezetű épületet vizsgálunk, amelynek homlokzata domináns módon üvegből van. A kérdés tehát az, hogy az adott mennyiségű hagyományos robbanószer detonációja milyen valószínűséggel okoz számottevő sérülést a homlokzatot alkotó üvegben. (Ez természetesen sok paramétertől függ. Ez dominánsan a detonáció távolsága, de lehet a felszín feletti magasság, esetleg időjárási viszonyok, a környezet beépítettsége, stb.) A rendelkezésre álló adatokat a  $P(S|F_i)$  likelihood valószínűségekre vonatkozólag a 2. táblázat tartalmazza, amelyben már feltüntettük a detonáció jellemző távolságát is.

Szenáriók (kg)	F1 = 5	F2 = 10	F3 = 50	F4 = 100	F5 = 250	F6 = 500	F7 = 1000
Távolság (m)	25	25	100	100	100	100	100
Likelihood							
Valószínűségek: $P(S F_i)$	0,00	0,33	0,00	0,45	0,99	0,99	1,00

2. táblázat: likelihood valószínűségek

Ezen adatok alapján, a teljes valószínűség tételével egyrészt megbecsülhetjük a sikeres terrorakció valószínűségét, amelyre a következőt kapjuk:

$$P(S) = \sum_{i=1}^7 P(S|F_i)P(F_i) = 0,3485 \quad (12)$$

másrészt pedig frissíthetjük az a priori eloszlást a Bayes-tétel alapján:

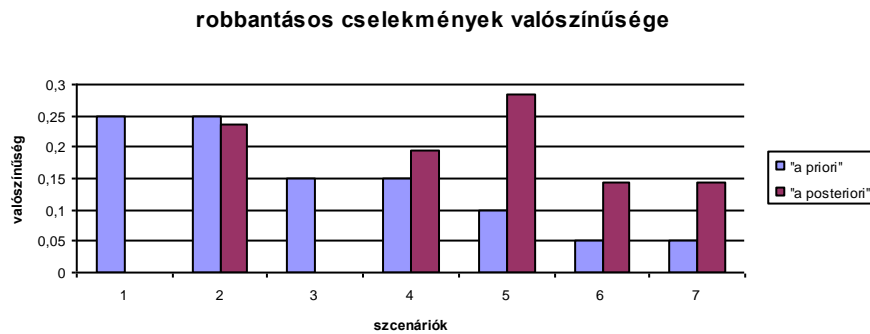
$$P(F_i|S) = \frac{P(S|F_i)P(F_i)}{P(S)}; i = 1, 2, \dots, 7 \quad (13)$$

Az egyszerűség érdekében elhagytuk a formulából az elkövetőkre vonatkozó  $T_j$  információt. A kapott a posteriori valószínűségeket tartalmazza a 3. táblázat.

Szenáriók (kg)	F1 = 5	F2 = 10	F3 = 50	F4 = 100	F5 = 250	F6 = 500	F7 = 1000
Távolság (m)	25	25	100	100	100	100	100
„a posteriori” Valószínűségek: $P(F_i S)$	0	0,236729	0	0,193687	0,284075	0,142037	0,143472

3. táblázat: „a posteriori” valószínűségek

Az a priori és a posteriori paraméterbecslések alapján adódó binomiális eloszlásokat szemlélteti az 1. ábrán látható hisztogram. Ezen világosan szembejön, hogyan változnak egy adott nemkívánatos esemény kapcsán az első közelítésben kapott valószínűségi adatok. A frissített adatok bemenetként szolgálnak egy következő lépésben a Bayes-tétel ismételt alkalmazásához, ha újabb adatok jutnak a birtokunkba. Az elmélet következménye az, hogy az információk birtokában kapott frissített valószínűségeloszlás más valószínűségeket tartalmaz, mint a kezdeti modellfeltevés vagy bármilyen természetű input adatok alapján kapott eloszlás. Ez utóbbi precízebben tükrözi a valóságot, a valósággal kapcsolatos tudásunkat, mert megfigyeléssel kapott adatok figyelembe vételével történő pontosítás alapján adódott.



1. ábra: Robbantásos cselekményekkel kapcsolatos a priori és a posteriori eloszlás

## NORMÁLIS ELOSZLÁS ALKALMAZÁSA A KOCKÁZATELEMZÉSBEN

Az egyik leggyakrabban alkalmazott folytonos eloszlás a normális eloszlás. Ha például egy kritikus infrastruktúra elleni robbantásos cselekményt veszünk alapul, akkor normális eloszlással írhatók le az alábbi, úgy a robbanótöltetre, mint a céltárgyra vonatkozó alapvető mennyiségek, mint valószínűségi változók [6]:

- az alkalmazott robbanótöltet tömege;
- a detonáció céltárgytól mért távolsága;
- a detonáció helyének a felszín feletti magassága;
- a robbanáskor keletkező lökéshullámban a maximális nyomás;
- a lökéshullám időtartama;
- a céltárgy egyes részeinek fizikai jellemzői: szakító szilárdság, torzió modulus, Young-modulus, stb. Egy sikeres terrorakció kockázatának becslésénél, ezen mennyiségek mindegyikére tekintettel kell lenni.

Tegyük fel tehát, hogy az  $X$  fizikai mennyiség egy normális eloszlású valószínűségi változóval írható le:  $X = N(\mu, \sigma^2)$ . Ez a likelihood függvény. Tegyük fel, hogy a keresett  $\theta$

paraméter a likelihood eloszlás várható értéke:  $\theta = \mu$ . A fenti felsorolásban említett valószínűségi változók várható értéke, ésszerű korlátok mellett, leírható ugyancsak normális eloszlással. Feltesszük tehát, hogy az a priori eloszlás is normális  $m$  valamint  $s^2$  hiperparaméterekkel:  $\theta = N(m, s^2)$ . A likelihood függvény és az a priori eloszlás rendre a következő alakot ölti:  $f(x|\theta) = N(x|\theta, \sigma^2); \pi(\theta) = N(m, s^2)$ . Az a posteriori eloszlás meghatározása a feladatunk. A konstans szorzóktól eltekintve, azt írhatjuk, hogy  $\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta) \cdot \pi(\theta)$ . Ha a hiperparamétereket is hangsúlyozni akarjuk, akkor némileg pontosabban írhatjuk, hogy  $\pi(\theta|x, m, s^2) \propto f(x|\theta, m, s^2) \cdot \pi(\theta|m, s^2)$ . Tegyük fel, hogy első lépésben csak egyetlen megfigyelést végzünk. A normális eloszlás sűrűségfüggvényének figyelembe vételével adódik, hogy

$$\pi(\theta|x, m, s^2) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(\theta-m)^2}{2s^2}\right) \quad (14)$$

azaz

$$\pi(\theta|x, m, s^2) \propto \frac{1}{2\pi\sigma s} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta-m)^2}{2s^2}\right) \quad (15)$$

Ez a függvény hasonlít egy normális eloszlás sűrűségfüggvényére. Ahhoz, hogy ennek várható értékét és a szórásnégyzetét, mint jellemző paramétert kiszámítsuk, szükséges némi algebrai átalakítás. Tejes négyzetté kiegészítés és rendezés után az exponenciális függvény kitevője az alábbi alakot ölti:

$$-\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 + s^2}{\sigma^2 s^2} \left( \theta - \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 + s^2} \left( \frac{x}{\sigma^2} + \frac{m}{s^2} \right) \right)^2 - \frac{1}{2(\sigma^2 + s^2)^2} (x-m)^2 \quad (16)$$

Az összeg második tagja számunkra indifferens, hiszen az a sűrűségfüggvényben csak egy konstans szorzót eredményez. Az első tag azonban nagyon fontos eredményt mutat. Azt, hogy az a posteriori eloszlás ugyancsak normális eloszlás,  $m'$  és  $s'^2$  paraméterekkel, ahol

$$m' = \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 + s^2} \left( \frac{x}{\sigma^2} + \frac{m}{s^2} \right) = \frac{s^2}{\sigma^2 + s^2} x + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + s^2} m; \quad s'^2 = \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 + s^2} \quad (17)$$

Ha ezt az eredményt általánosítjuk arra gyakorlatban fontos esetre, hogy általában (lehetőség szerint) nem egy, hanem  $n$  számú megfigyelést végzünk az  $X$  valószínűségi változóval kapcsolatban. Ekkor használjuk fel azt az ismert eredményt, hogy  $n$  számú megfigyelés során a szórásnégyzet az  $n$ -ed részére csökken. Az eredmény úgy adódik az előbbiből, hogy  $\sigma^2$  helyére  $\sigma^2/n$  kerül,  $x$  helyére pedig a mintaátlag:  $\bar{x}$ . Tehát, ha a likelihood függvény normális eloszlással adott, valamint a várható értékre, mint paraméterre vonatkozó a priori eloszlás normális eloszlás  $N(m, s^2)$ , akkor az a posteriori eloszlás is normális eloszlás:  $N(m', s'^2)$ , ahol a frissített paraméterek:

$$m' = \frac{(\sigma^2/n) s^2}{(\sigma^2/n) + s^2} \left( \frac{\bar{x}}{\sigma^2/n} + \frac{m}{s^2} \right) = \frac{ns^2}{\sigma^2 + ns^2} \bar{x} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + ns^2} m; \quad s'^2 = \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 + ns^2} \quad (18)$$

Másképpen fogalmazva, azt mutattuk meg, hogy a normális eloszlás konjugáltja ugyancsak normális eloszlás. Elemezzük a kapott eredményt. Ha a likelihood eloszlás  $\theta$  várható értékét normális a priori eloszlással modellezzük, akkor ezen eloszlás jellemzőire vonatkozólag élünk egy kezdeti feltevéssel:  $m, s$ . Ha a Bayes-tétellel áttérünk az a posteriori eloszlásra, amely ugyancsak normális eloszlás, akkor a várható érték új modellparamétereire kapjuk az  $m', s'^2$

értékeket. Ezen paraméterek vizsgálatához vezessük be a  $\lambda = \frac{ns^2}{\sigma^2 + ns^2}$  jelölést. Ekkor világos, hogy a frissített várható érték felírható  $m' = \lambda\bar{x} + (1-\lambda)m$  alakban, ahol nyilván  $\lambda \in [0,1]$ . Ez azt jelenti, hogy  $m'$  az  $m$  és  $\bar{x}$  konvex lineáris kombinációja, ha  $\lambda$  változik 0-tól 1-ig, akkor  $m'$  értéke változik  $m$ -től  $\bar{x}$ -ig. Vegyük észre, a következőket:

Ha nem végzünk egyetlen megfigyelést sem, akkor  $\lambda = 0$ , és  $m' = m$ .

Ha a mérések, megfigyelések számát növeljük, akkor  $\lambda$  értéke növekszik,  $n \rightarrow \infty$  esetén  $\lambda \rightarrow 1$ , és ekkor  $m' \rightarrow \bar{x}$ . Felhívjuk a figyelmet, hogy ez éppen a várható érték 2.5. pontban levezetett maximum likelihood becslése.

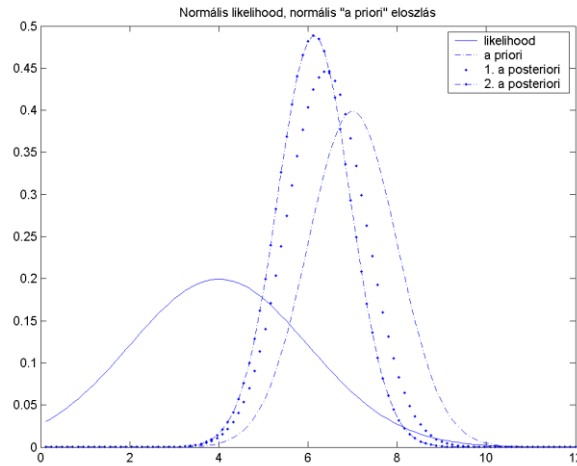
$n \rightarrow \infty$  esetén  $s'^2 \rightarrow 0$ , tehát egyre pontosabb, egyre kisebb bizonytalansággal kapjuk a becslést a keresett paraméterre.

Ha az a priori eloszlás szórását „minden határon túl növeljük”, tehát  $s'^2 \rightarrow \infty$ , vagyis közelítünk az egyenletes eloszláshoz, akkor ugyancsak  $m' \rightarrow \bar{x}$ , tehát közelítünk a maximum likelihood becsléssel kapott értékhez. Ez annyit jelent, hogy minél nagyobb az a priori eloszlás szórása, annál kisebb hatással van az a posteriori eloszlásra. Határesetben azt mondhatjuk, hogy semmi hatással nincs rá, mert a maximum likelihood becslés lehet a kiinduló paraméterérték, amely eszerint nem változik meg a jelzett körülmények között.

Az eljárás ezek után az, hogy a fentiekben vázolt eljárást ismételjük, valahányszor csak új adatok birtokába jutunk, illetve ahányszor szükségesnek látszik. A módszer előnye matematikai szempontból az, hogy az a priori eloszlás paramétereiről az a posteriori eloszlás paramétereire való áttérés minden lépésben ugyanazzal a formulával adható meg, tehát az eljárás könnyen kivitelezhető, nem okoz matematikai nehézségeket.

Tekintsünk egy példát. Tegyük fel, hogy egy vizsgált mennyiség normális eloszlású, melyre vonatkozólag végeztünk egy megfigyelést, melynek értéke  $x = 4$ . Egyetlen mérés esetén természetesen ez tekintendő átlagértéknek, azaz a likelihood eloszlás várható értékének. Tegyük fel, továbbá, hogy a szórás adott, legyen ez  $\sigma = 2$ . Tegyük fel, hogy a várható értéket (az ismeretlen paramétert), mint valószínűségi változót szintén normális eloszlással modellezzük. Tegyük fel, hogy a várható értéket  $m = 7$  várható értékkel és  $s = 1$  szórással adott paraméterekkel írjuk le, az a priori eloszlás tehát  $N(7, 12)$ . Ha a fentiek alapján frissítjük az eloszlást,  $N'(6,4; 0,892)$  a posteriori normális eloszlást kapjuk. Az eljárás ismételhető, az első lépésben kapott  $N'(6,4; 0,892)$  eloszlás úgy kezelhető, mint az a priori eloszlás, tehát ismételten frissíthető. Tegyük fel ennek érdekében, hogy egy újabb megfigyelést végeztünk, melynek értéke  $x' = 4,8$ . A második lépésben kapott a posteriori eloszlás:  $N''(6,13; 0,812)$ . Az eljárást grafikusán szemléltettük a 2. ábrán.





2. ábra: Normális *a priori* eloszlás és normális likelihood függvény esetén az *a posteriori* eloszlások alakulása két lépésben

Amit hangsúlyoznunk szükséges, az eljárás ismételt alkalmazása során egyrészt az, hogy az *a posteriori* eloszlások egyre „közelebb” kerülnek a kezdeti megfigyelés eloszlásához, valamint az, hogy az eljárás ismétlése során a szórás csökken, tehát a becslés bizonytalansága is csökken.

Tegyünk fel a vizsgált mennyiséggel kapcsolatban egy konkrét kérdést, és vizsgáljuk meg, hogyan függ a kérdésre adott válasz az *a posteriori* becslésektől. Kérdezzük a következőt: Mi a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke az ]5, 6[ intervallumba esik?

1. Az *a priori* becslés alapján:

$$P(5 < x < 6) = \Phi\left(\frac{6-7}{1}\right) - \Phi\left(\frac{5-7}{1}\right) = \Phi(-1) - \Phi(-2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359$$

2. Az első *a posteriori* becslés alapján:

$$P(5 < x < 6) = \Phi\left(\frac{6-6,4}{0,89}\right) - \Phi\left(\frac{5-6,4}{0,89}\right) = \Phi(-0,44) - \Phi(-1,57) = \Phi(1,57) - \Phi(0,44) = 0,2718$$

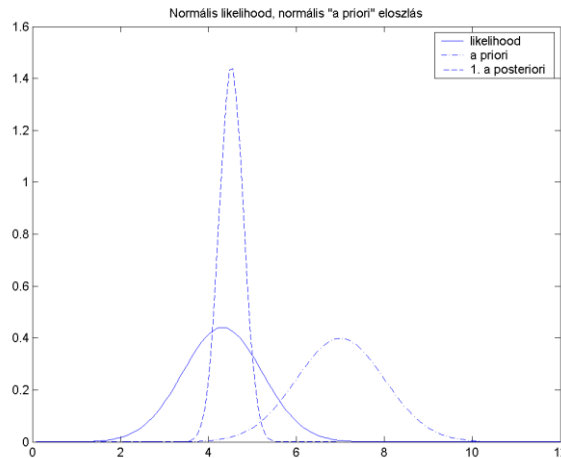
3. A második *a posteriori* becslés alapján:

$$P(5 < x < 6) = \Phi\left(\frac{6-6,13}{0,81}\right) - \Phi\left(\frac{5-6,13}{0,81}\right) = \Phi(-0,16) - \Phi(-1,39) = \Phi(1,39) - \Phi(0,16) = 0,3541$$

Ha csak kevés adat áll rendelkezésre, csekély számú megfigyelésre van csak lehetőség, ezt az eljárást lehet követni. Ha azonban több adattal rendelkezünk, az általánosabb összefüggéseket használhatjuk és természetesen pontosabb eredményt kapunk.

Induljunk ki a következő, nagyság szerint sorba rendezett adatsorból: 3,0; 3,3; 3,6; 4,0; 4,2; 4,4; 4,5; 4,9; 5,5; 5,8. Tegyük fel, hogy erre az  $n = 10$  adatból álló statisztikai mintára normális eloszlást szeretnénk illeszteni. Élünk egy a priori feltevessel majd az adatok alapján frissítjük a becslést. Az összehasonlítás érdekében tegyük fel, hogy az *a priori* eloszlás ugyancsak  $N(7, 12)$  normális eloszlás, mint az előző példában. Az adatsor alapján a mintaátlag  $\bar{x} = 4,32$ , a korrigált empirikus szórás pedig  $s^* = 0,9053$ . Felhívjuk a figyelmet arra, hogy egyetlen adat esetén kénytelenek vagyunk preconcepciókkal élni a szórásról, több adat esetén viszont már becslés adható az ismeretlen paraméterre. Bár hangsúlyozzuk, hogy ismét a várható értéket tekintjük modellezendő paraméternek. Ha a levezetett formulák alapján frissítjük a várható értéket és a szórásnégyzetet, akkor kapjuk az *a posteriori* eloszlás

paramétereit:  $m' = 4,5230$ ;  $s' = 0,2752$ . Már ebből a két adatból is érzékelhető, hogy milyen jelentős hatása van annak, hogy nem egyetlen adatból indulunk, ami még szembeűnőbb, ha ebben az esetben is szemléltetjük a három érintett eloszlást a 3. ábrán.



3. ábra: Normális *a priori* és normális likelihood eloszlás esetén az *a posteriori* eloszlások több adat birtokában

Az egyik lényeges eltérés, hogy a likelihood eloszlás sokkal koncentráltabb. A szórás a felére csökkent, bár világosan kell látni, hogy egyetlen adatból nem lehet szórást becsülni. A második pedig az, hogy az *a priori* eloszlásnak sokkal kisebb hatása van az *a posteriori* eloszlásra, mint az előző esetben. Több adat felhasználása esetén tehát egyre kevésbé érvényesül a modellezésnél elkerülhetetlen szubjektivitás. Az *a posteriori* eloszlás sokkal jobban koncentráliódik a mérési adatokra, mint egy adat esetén. Végezetül vizsgáljuk meg, hogy hogyan alakul az  $]5, 6[$  intervallumba esés valószínűsége:

1. Az *a priori* becslés alapján:

$$P(5 < x < 6) = \Phi\left(\frac{6-7}{1}\right) - \Phi\left(\frac{5-7}{1}\right) = \Phi(-1) - \Phi(-2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359$$

2. Az *a posteriori* becslés alapján:

$$P(5 < x < 6) = \Phi\left(\frac{6-4,52}{0,27}\right) - \Phi\left(\frac{5-4,52}{0,27}\right) = \Phi(5,48) - \Phi(1,77) = 1 - 0,9616 = 0,0384$$

A mérések, megfigyelések hatása igen szembeűnő. Az *a posteriori* becslés sokkal közelebb van a maximum likelihood becsléssel kapott eloszláshoz – a hangsúly természetesen csak a várható értéken van –, továbbá éppen ellentétes értelmű hatása van az *a posteriori* eloszlásnak a kérdéses valószínűsége, ha egy egész „adatsor” van a birtokunkban, mintha csak egyetlen adatra támaszkodunk. Ez a hatás természetesen erősen függ az *a priori* eloszlás megválasztásától. Ennek a kérdésnek a részletes elemzésére kitérünk a 4. pontban.

## AZ A PRIORI ELOSZLÁS HATÁSA

Vizsgáljuk meg kvantitatív módon, hogy a hiperparaméterek különböző értékei milyen módon befolyásolják az *a posteriori* eloszlást.

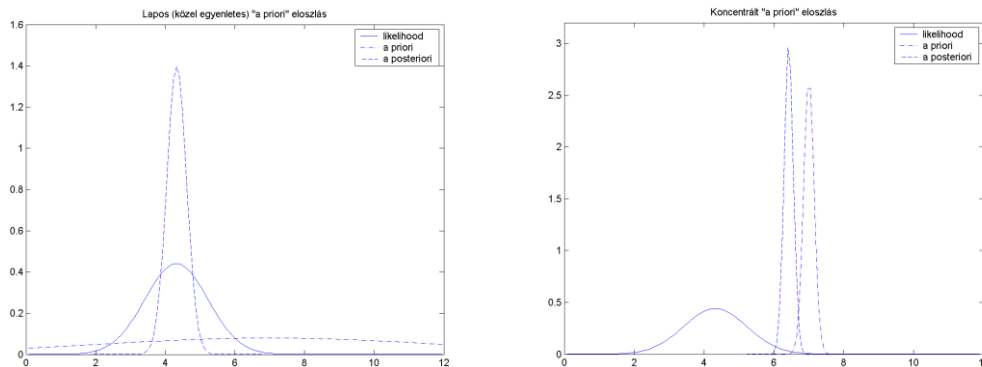
Tekintsük elsőként a 3. pontban tanulmányozott normális eloszlást, amikor mind a likelihood függvény, mind az *a priori* eloszlás normális eloszlás. Idézzük fel az eredményt, miszerint ha az *a priori* eloszlás  $m$  és  $s^2$  hiperparaméterekkel adott normális eloszlás, azaz  $N(m; s^2)$ , akkor az *a posteriori* eloszlás is normális eloszlás,  $N(m'; s'^2)$ , ahol a frissített paraméterek:

$$m' = \frac{ns^2}{\sigma^2 + ns^2} \bar{x} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + ns^2} m; \quad s'^2 = \frac{\sigma^2 s^2}{\sigma^2 + ns^2} \quad (19)$$

Vizsgáljunk meg két szélsőséges esetet.

1. eset: Elsőként tegyük fel, hogy a modellezett paraméterekről nincs kellő mennyiségű információnk. Ekkor célszerű egyenletes eloszlással modellezni a  $\theta = \mu$  paramétert. Ha ezt normális eloszlással írjuk le, egzakt egyenletes eloszlás nem létezik, de jó közelítéssel megkapható, ha az  $s$  szórást „minden határon túl” megnöveljük. Az eloszlás a vizsgált paramétertartományon kellően „lapossá” tehető így. Ha viszont  $s \rightarrow \infty$ , akkor jól láthatóan  $m'$  előállításában szereplő első tagban a tört 1-hez tart, a második tagban a tört viszont 0-hoz tart, azaz  $m' \rightarrow \bar{x}$ . Idézzük fel, hogy az  $\bar{x}$  mintaátlag éppen a modellezett  $\mu$  paraméter maximum likelihood becslése, amit a Bayes-tételtől független megfontolások alapján használunk a  $\mu$  közelítésére. Ebben az esetben tehát az a priori eloszlás hatástalan.

2. eset: A másik szélsőséges eset, amikor  $s \rightarrow 0$ , tehát az a priori eloszlás az  $m$  pontra koncentrálódik, amikor jól láthatóan  $m' \rightarrow m$ . Ebben a határesetben az a priori eloszlás hatása olyan erős, hogy gyakorlatilag „eltűnik” a likelihood modell a számításokból. Az a priori eloszlás annyira domináns, hogy a modellezett paraméter értéke lényegileg nem változik a frissítés során, az a posteriori eloszlás ugyanazt a paramétert szolgáltatja.



a) „lapos” a priori

b) koncentrált a priori

4. ábra: Az a priori normális eloszlás szórásának hatása az a posteriori eloszlásra

A mondottakat illusztrálja a 4. ábra, amely a 3. pontban már vizsgált  $n = 10$  elemű statisztikai mintára támaszkodik. A két ábra között a különbség csak abban áll, hogy az a) ábrán  $N(7; 5)$ , a b) ábrán pedig  $N(7; 0,15)$  a priori eloszlást alkalmaztunk. Az a) esetben tehát közelítettünk az egyenletes eloszláshoz, a b) esetben pedig az eloszlás erősen koncentrálódik az  $m = 7$  pontra. Az a posteriori eloszlások rendre a következők:  $N(4,3288; 0,28582)$  illetve  $N(6,4227; 0,13292)$ . A likelihood eloszlás mindkét esetben:  $N(4,3200; 0,9053)$ .

## DÖNTÉSHOZÁS A BAYES-ELMÉLET KERETEI KÖZÖTT

A 2-4. pontokban azzal a kérdéssel foglalkoztunk, hogy hogyan lehet a kockázatelemzés során a kockázat kifejezésében szereplő valószínűségeket kiszámítani, illetve a Bayes-elmélet alkalmazásával a birtokunkba jutott információk alapján ezeket aktualizálni. Az alábbiakban azzal a kérdéssel foglalkozunk – a bemutatott módszerek alkalmazásaképpen –, hogy ha egyszerre több modellt vizsgálunk, hogyan lehet ezek szimultán figyelembevételével döntést hozni nemkívánatos eseményekkel kapcsolatban, illetve azt vizsgáljuk, hogy erre az ítéletre milyen hatással van a Bayes-féle elmélet.

1. példa: Tegyük fel kiindulópontként, hogy semmiféle megfigyelésből származó adat nem áll rendelkezésre, csak az a modell, amellyel a nemkívánatos eseményt leírjuk, tehát a likelihood függvény. Tegyük fel, hogy egy bizonyos esemény kapcsán felmerül két lehetőség, két scenárió, ami két likelihood függvénnyel írható le. A kérdés az, hogyan tudunk dönteni az eseménnyel kapcsolatosan, hogyan dönthető el, hogy melyik scenárió valósult meg. Ha csak a likelihood függvényre támaszkodunk, akkor a 4. pont alapján kijelenthetjük, hogy olyan a posteriori eloszlásokat kell vizsgálnunk, összehasonlítanunk, amelyek az egyenletes a priori eloszlásból származtathatók. A hivatkozott pontban megmutattuk, hogy ilyen esetben az a posteriori eloszlás lényegileg egybeesik a likelihood függvénnyel, ez a „nem informatív” modell.

Példaképpen tegyük fel, hogy egy robbantásos cselekménnyel kapcsolatos eseményt vizsgálunk. A két szóba jöhető scenárió legyen a következő: robbantás 25kg illetve 50kg TNT-ekvivalens hagyományos robbanótöltettel. Az egyik esetben szóba jöhet egy motorkerékpáros elkövető, a másik esetben pedig egy személyautó, mint célba juttató eszköz. Mindkét esetben feltesszük, hogy a robbanótöltet mennyisége normális eloszlást követ, ami a megszokott feltételezés. Feltesszük továbbá, hogy az első esetben a szórás  $\sigma_1 = 10$  kg a második esetben pedig  $\sigma_1 = 15$  kg. A kérdés az, hogy ha bekövetkezik egy robbantásos esemény, akkor hogyan tudunk dönteni abban a kérdésben, hogy melyik scenárió következett be. Ebben a pontban további adatok hiányában adunk becslést erre a kérdésre. Ez a kérdés alapvető fontosságú a 2. pontbeli vizsgálatok, konkrétan az 1-3. táblázatok adatainak meghatározása szempontjából.

Induljunk ki a Bayes-tételből. A 2. pontbeli jelöléseket alkalmazva legyen  $S$  a sikeres esemény,  $F_1$  és  $F_2$  pedig jelentse azt, hogy rendre az 1. illetve a 2. scenárió szerint hajtották végre a cselekményt. A számítások szempontjából alapvető a likelihood függvény:

$$f(S|\text{scenárió}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right); \text{ha scenárió} = F_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right); \text{ha scenárió} = F_2 \end{cases} \quad (20)$$

Adatok hiányában ez tartalmazza az összes információt, ez írja le az összes ismeretünket a problémával kapcsolatban. A kérdésre adandó válasz nyilvánvalóan azon múlik, hogy a  $P(F_1|S)$  illetve a  $P(F_2|S)$  feltételes valószínűségek hogyan viszonyulnak egymáshoz. Ha  $P(F_1|S) > P(F_2|S)$  akkor természetesen úgy döntünk, hogy az  $F_1$  scenárió következett be, és értelemszerűen a fordított esetben az  $F_2$  a döntés, illetve – ami a Bayes-elmélet nagy előnye –, mindkét scenárióról lesz információnk megfelelő súlyok, valószínűségek figyelembevételével. A válasz – tekintettel arra, hogy a  $P(F_i|S); (i=1,2)$  valószínűségek a posteriori valószínűségek –, a Bayes-tétellel adódik:

$$P(F_1|S) = \frac{P(S|F_1)P(F_1)}{P(S)}; P(F_2|S) = \frac{P(S|F_2)P(F_2)}{P(S)} \quad (21)$$

Matematikai szempontból ítélve a probléma abban áll, hogy a kérdésre adandó válasz diszkrét eloszlást jelent, a likelihood függvények azonban folytonos függvények. Diszkrétizálnunk kell tehát az eloszlást. Erre nyilvánvalóan kínálkozik az a lehetőség, hogy a likelihood függvények értékét hasonlítjuk össze. A kérdéses egyenlőtlenség ekkor a következő:

$$\left(\frac{P(S|F_1)P(F_1)}{P(S)}\right) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \left(\frac{P(S|F_2)P(F_2)}{P(S)}\right) \text{ azaz } \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \left(\frac{P(S|F_1)P(F_1)}{P(S)}\right) \text{ vagy } \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \left(\frac{P(S|F_2)P(F_2)}{P(S)}\right) \quad (22)$$

Ha figyelembe vesszük a likelihood függvény alakját, az egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

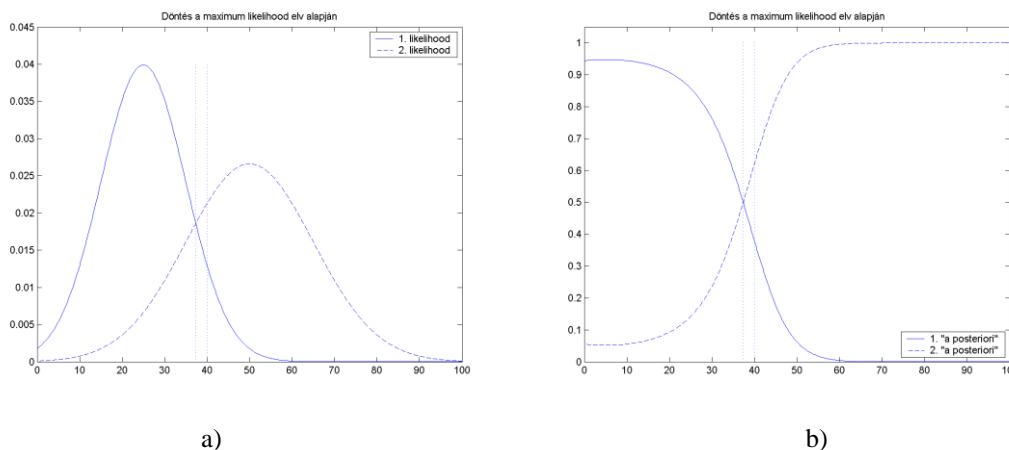
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) \cdot P(F_1) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \cdot P(F_2) \quad (23)$$

Tekintettel arra, hogy ebben a pontban azt vizsgáljuk, milyen döntést hozhatunk, ha nincs

lényeges a priori információnk, az egyenletes eloszlást tételezzük fel:  $P(F_1) = P(F_2) = \frac{1}{2}$ . Ekkor az kapjuk, hogy a vizsgálandó egyenlőtlenség a következőre redukálódik:

$$\frac{1}{10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{1}{15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \quad (24)$$

A döntés a scenáriót illetően azon múlik, hogy tekintetbe véve egy adott  $x$  értéket, melyik függvény értéke a nagyobb. Ez a maximum likelihood elv alapján hozott ítélet a kérdést illetően. Az egyenlőtlenség megoldása egyszerűbb, ha szemléltetjük az egyenlőtlenség két oldalán álló függvényeket egy koordinátarendszerben. Ez látható az 5.a) ábrán.



5. ábra: Döntés a maximum likelihood elv alapján

Világos, hogy a kérdésre adandó válasz azon múlik, hogy a két görbének milyen abszcisszájánál van a metszéspontja. Ez könnyen adódik, ha a két függvényt egyenlővé tesszük, majd képezzük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2} = \ln\left(\frac{1}{15}\right) - \frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2} \quad (25)$$

Ez egy egyszerű másodfokú egyenlet, amelynek adott esetben a közelítő megoldása  $x_0 = 37,3$ . Ennél az abszcisszájánál szerepel az ábrában egy függőleges egyenes szakasz, amely a döntésben alapvető szerepű. Eszerint, ha a megfigyelésünk szerint  $x < 37,3$  akkor ítéletünk szerint az  $F_1$  ha pedig  $x > 37,3$  akkor az  $F_2$  scenárió következett be nagyobb valószínűséggel. Természetesen kijelentésünk nem kategorikus, mindkét esemény bekövetkezését tekintetbe vehetjük egy-egy súllyal, a bekövetkezés valószínűségével, amely arányos egy adott  $x$ -hez tartozó ordinátákkal.

A következő pontbeli vizsgálatok okán még szerepel az ábrában az  $x = 40$  érték is. Ez a gyakorlat szempontjából jelentheti azt, hogy tudomásunkra jut egy robbantásos cselekmény, amelyet 40kg TNT-ekvivalens töltettel követtek el. A kérdés az, hogy motorkerékpárral vagy személyautóval juttatták célba. Mivel az  $x = 40$  helyen az  $F_2$ -nek megfelelő likelihood függvény értéke nagyobb, az ítéletünk az, hogy  $x = 40$  esetben az  $F_2$  scenárió szerint történt az esemény nagyobb valószínűséggel. Tanulságos még az 5.b) ábra is, ahol minden szóba jöhető  $x$  érték esetén szemléltettük az a posteriori valószínűségeket:

$$P(F_1|S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \right]^{-1}$$

$$P(F_2|S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \right]^{-1}$$

Mivel ezek a valószínűségek – ellentétben a likelihood függvénnyel – eloszlást alkotnak, minden  $x$  érték esetén ezen függvényértékek összege egzaktul egy. A b) ábrán a „döntési határ” az az abszcissa, ahol mindkét függvény a 0,5 értéket veszi fel, amely – természetesen – egybeesik az 5.a) ábrán levő görbék metszéspontjának abszcisszájával. Világos, hogy az  $x = 40$  értékhez tartozó függvényértékek összehasonlítása ugyanarra a következtetésre vezet.

2. példa: Az előző pontbeli vizsgálatokat terjesszük ki arra az esetre, amikor rendelkezésünkre áll lényeges a priori információ, azaz olyan eloszlás amely különbözik a

$P(F_1) = P(F_2) = \frac{1}{2}$  egyenletes eloszlástól. Ebben az esetben a likelihood függvények nem változnak, tehát az 5.a) ábra ebben az esetben is hűen adja a likelihood modellt, azonban az a posteriori eloszlás különbözik az 5.b) ábrán láthatótól. Ha az a priori eloszlást az egyszerűség kedvéért  $p_1$  és  $p_2$  jelöli, akkor azt kapjuk, hogy a vizsgálandó egyenlőtlenség az

$$\frac{1}{10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) \cdot p_1 \stackrel{<}{>} \frac{1}{15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \cdot p_2 \quad (26)$$

alakot ölti. A döntéshez szükséges határpont meghatározásához adódó egyenlet logaritmált alakja pedig a következő:

$$\ln\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2} + \ln(p_1) = \ln\left(\frac{1}{15}\right) - \frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2} + \ln(p_2) \quad (27)$$

A probléma matematikai szempontból lényegében nem változott, ez úgyszintén egy másodfokú egyenlet, amelynek megoldása nyilvánvalóan függ az a priori eloszlástól, tehát az előzőtől eltérő megoldást kapunk. Az a posteriori eloszlás pedig az alábbi formulákkal adott:

$$P(F_1|S) = \frac{p_1}{\sqrt{2\pi}10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) \cdot \left[ \frac{p_1}{\sqrt{2\pi}10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) + \frac{p_2}{\sqrt{2\pi}15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \right]^{-1}$$

$$P(F_2|S) = \frac{p_2}{\sqrt{2\pi}15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \cdot \left[ \frac{p_1}{\sqrt{2\pi}10} \exp\left(-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot 10^2}\right) + \frac{p_2}{\sqrt{2\pi}15} \exp\left(-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 15^2}\right) \right]^{-1}$$

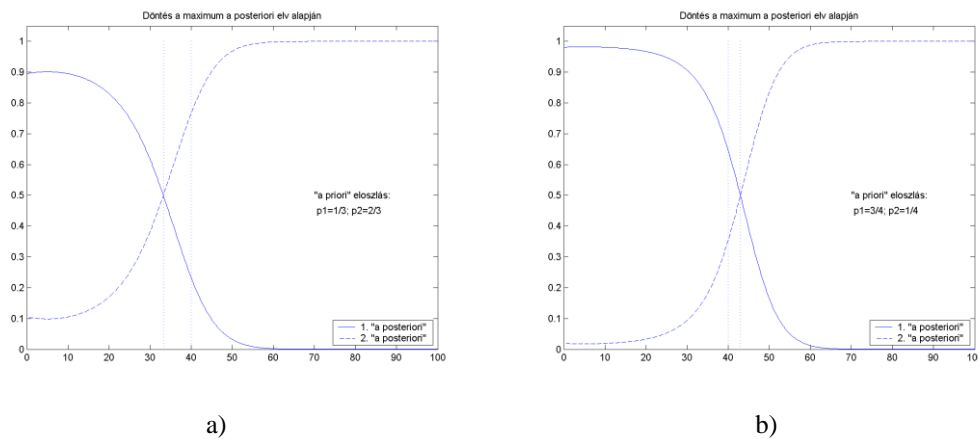
Vizsgáljunk meg a következtetések szempontjából két esetet.

1. eset: Az első esetben tegyük fel, hogy megfigyelések, adatgyűjtés eredményeképpen kiderült, hogy az egyes scenáriók valószínűsége, tehát az a priori eloszlás a következő:

$$p_1 = \frac{1}{3}; p_2 = \frac{2}{3}$$

Ebben az esetben azt kapjuk, hogy a döntéshozást befolyásoló határérték:  $x_0 = 33,4$ . Ez azt jelenti, hogy ha  $x < 33,4$  akkor az F1 scenáriót tekintjük nagyobb valószínűséggel bekövetkezettnek, ha viszont  $x > 33,4$  akkor az F2-t. Ha egy megfigyelés során kapott érték  $x = 40$ , akkor eszerint a 2. scenárió következett be.

2. eset: Második példaként tegyük fel, hogy  $p_1 = \frac{3}{4}; p_2 = \frac{1}{4}$ . Ekkor  $x_0 = 42,9$ . A helyzet értékelése – értelemszerű módosítással –, azonos az 1. példabelivel. Egy lényeges különbségre azonban rámutatunk. Az  $x = 40$  esemény bekövetkezése most arra a következtetésre vezet – ellentétben az 1. példabeli döntéstől –, hogy az F1 scenárió szerint történt az esemény. A mondottakat szemlélteti a 6. ábra, ahol csak az a posteriori eloszlásokat szemléltettük, hiszen – mint már hangsúlyoztuk –, a likelihood függvények nem különböznek az 1. példabelitől.



6. ábra: A „maximum a posteriori” döntés szemléltetése különböző a priori eloszlások esetén

Ha tekintetbe vesszünk az egyenletes eloszlástól különböző a priori eloszlást, és a döntést – a likelihood függvény figyelembe vétele mellett – az a posteriori eloszlások összehasonlítása alapján végezzük, amikor is azt a scenáriót tekintjük bekövetkezettnek, amelyikhez nagyobb a posteriori valószínűség tartozik, maximum a posteriori elv alapján hozott döntésnek nevezzük. A fentiekben elemzett egyszerű példákon keresztül ennek alkalmazását szándékoztuk bemutatni.

## KÖVETKEZTETÉS

A fentiekben bemutatott, hogy a kockázatelemzés valószínűségi szemléletű tárgyalására alkalmas eszköz a Bayes-féle elmélet. Kiváló elméleti keret az egyes scenáriók bekövetkezésének valószínűségi becslésére mind abban az esetben, ha nincs a birtokunkban megfigyelésekből származó adat, csak modellfeltevés, mind akkor, ha rendelkezünk megfigyelésből származó adatokkal. Ez utóbbi esetben az eloszlások frissítésére, adataink aktualizálására igen alkalmas eszköz. Az elmélet további előnye, hogy ez a frissítési, aktualizálási lépés tetszőlegesen sokszor ismételhető, minden alkalommal, valahányszor újabb adatok birtokába kerülünk. Az elmélet a maximum a posteriori elv alapján a döntéshozásban is alkalmazható, amennyiben lehetséges alternatívák közötti választás lehetősége áll fenn. A Bayes-analízis módszereit – terjedelmi korlátok miatt – csak normális eloszlás esetén mutattuk be, azonban hangsúlyozzuk, hogy gyakorlatilag tetszőleges valószínűségi változó

esetében adaptálható, ezáltal lehetőséget biztosít bármilyen természetű, valószínűségi változóval leírható esemény vizsgálatára.

### FELHASZNÁLT IRODALOM:

1. Ezell, Bennett, Winterfeldt, Sokolowski, Collins: Probabilistic Risk Analysis and Terrorism Risk. Risk analysis, Vol. 30, No.4, 2010.
2. Bier, V.M., Mosleh, A.: The subjective Bayesian approach to Probabilistic Risk Assessment. Reliability Engineering and System Safety 23 (1988) 269-275.
3. Elisabeth Paté-Cornell, Seth Guikema: Probabilistic Modelling of Terrorist Threats: A System Analysis Approach to Setting Priorities Among Countermeasures. Military Operations Research. Vol. 7, No. 4, pp. 5-20. 2002
4. Seth D. Guikema, Terje Aven: Assessing risk from intelligent attacks: A perspective on approaches. Reliability Engineering and System Safety 95 (2010) 478-483.
5. Mark G. Stewart, Michael D. Netherton: Security risks and probability risk assessment of glazing subjects to explosive blast loading. Reliability Engineering and System Safety 93 (2008) 627-638.
6. David B. Chang, Carl S. Young: Probabilistic Estimates of Vulnerability to Explosive Overpressures and Impulses. Journal of physical security 4(2), (2010) pp. 10-29

TÁMOP-4.2.1.B-11/2/KMR-2011-0001 Kritikus infrastruktúra védelmi kutatások  
„A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával  
valósul meg.”

„The project was realised through the assistance of the European Union, with the co-financing  
of the European Social Fund.”