

Jánosi Andrea,¹ Fekete Árpád,² Szám Dorottya³

Markov-láncok alkalmazása az aszályos napok valószínűségének megállapítására Budapest térségében

Application of Markov Chains to Estimate the Probability of Drought Days in the Budapest Area

Absztrakt

A klímaváltozás egyik hatása hazánkban az aszályos időszakba eső napok számának növekedése. Ennek következtében egyre nagyobb szükség van a hatékony csapadékvíz-gazdálkodásra, valamint a hőhullámok elleni védekezésre. Budapest térségének csapadékadatát felhasználva becslést adunk arra, hogy a jövőben mekkora eséllyel fog egy nap aszályos időszakba esni. Egy viszonylag új vizsgálati módszert, a Markov-láncok elméletét használtuk fel a budapesti csapadékadatsorok elemzéséhez. Hipotézisvizsgálattal azt is bizonyítottuk, hogy az aszályos időszakok között eltelt idő exponenciális eloszlást követ.

Kulcsszavak: aszály, Markov-lánc, átmenet-valószínűség, határeloszlás, csapadékvíz-gazdálkodás

Abstract

One of the effects of climate change in Hungary is the increase in the number of days falling into the drought period. As a result, there is an increasing need for efficient rainwater management and protection against heat waves. Applying precipitation data for the Budapest area, we estimate the probability of a day falling into a drought period in the

¹ BSc-hallgató, Nemzeti Közszolgálati Egyetem Víz tudományi Kar, e-mail: janosi.andrea@stud.uni-nke.hu

² Adjunktus, Nemzeti Közszolgálati Egyetem Víz tudományi Kar, e-mail: fekete.arpad@uni-nke.hu

³ Kutató, Nemzeti Közszolgálati Egyetem Víz tudományi Kar, e-mail: szam.dorottya@uni-nke.hu

future. The theory of Markov chains is a relatively new method of analysis, and it was applied to analyse the Budapest precipitation data series. We also tested the hypothesis that the time between drought periods follows an exponential distribution.

Keywords: drought, Markov chain, transition probability, limit distribution, rainwater management

Bevezetés

A globális éghajlatváltozás következtében Magyarországon a hőmérséklet átlagos emelkedése 1901 és 2009 között 1,36 °C-ra tehető.⁴ Míg a hőmérséklet-változásra pontos számszerű adatokkal tudunk szolgálni, a csapadék hosszú távú mennyiségi eloszlására jóslatot adni közel sem ilyen egyszerű vállalkozás. Az erre vonatkozó kutatások egyik része vitatja az évi csapadékösszegek jelentős változását,⁵ más része kimutatja a csökkenő trendet. A csapadék területi eloszlásának szignifikáns változását is kimutatták Magyarországon.⁶

Az elmúlt éveket vizsgálva kijelenthető, hogy egyre gyakoribbá váltak a szélsőséges időjárási formák, mint a rövid időn belül lehulló nagy intenzitású csapadékevényesség vagy a hosszabb csapadékmentes időszakok és ezzel együtt az aszályok.⁷ Gyakrabban észlelhetünk hevesebb záporokat és zivatarokat, mint több napig tartó enyhébb csapadékhullást. Ezzel együtt a lehulló csapadék relatíve nagyobb része folyik le, és kisebb hányada szivárog be a talajba vagy tározódik. Emiatt az árvízveszély is növekedhet.⁸ Ezzel párhuzamosan az éghajlati előrejelzések és modellek az aszályos időszakok gyakoribbá válására hívják fel a figyelmet. Jó példa erre a 2022-es történelmi aszály, amely tükröződött a rendkívül alacsony mezőgazdasági terméshozamokban.⁹

A kutatás a Markov-láncok elméletét használja fel, amely viszonylag újszerűnek számít a csapadékviszonyok statisztikai elemzésében. Haan és társai már 1976-ban modellezték az átmenetvalószínűségi mátrix használatával a különböző időszakok csapadékos és csapadékmentes napjainak egymás után következő folyamatát.¹⁰ Egy viszonylag friss kutatásban Freidooni és társai a Markov-láncokat annak kiszámítására alkalmazták, hogy egy nap mekkora valószínűséggel esik hóhullámos időszakba. A módszer jogosságát részletesen bizonyították.¹¹ Ezt az ötletet használta Fekete és Keve annak vizsgálatára bajai mintaterületen, hogy egy nap mekkora valószínűséggel esik aszályos időszakba.¹²

Ez a tanulmány Budapest aszályos időszakait vizsgálja a növények vegetációs időszakában (április 1. és október 31. között) egy rövid, 10 éves időszoron (2011–2020) keresztül a gyors ellenőrizhetőség végett. Számításokkal előrejelzést próbálunk adni

⁴ BARTHOLY et al. 2011: 146–169.

⁵ KOCSIS 2018: 187.

⁶ Országos Meteorológiai Szolgálat 2022.

⁷ LAKATOS et al. 2014: 158–163; Országos Meteorológiai Szolgálat 2022.

⁸ PADÁNYI–HALÁSZ 2012: 120–121.

⁹ KSH 2022.

¹⁰ HAAN–ALLEN–STREET 1976: 443–449.

¹¹ FREIDOOONI–ATAEI–SHAHRIAR 2015: 26–45.

¹² FEKETE–KEVE 2020: 60–70.

arról, hogy a jövőben mekkora eséllyel fog egy nap aszályos időszakba esni. Így következtetni tudunk a budapesti éghajlat jellemzőinek jövőbeli változásaira.

Az aszály fogalma, mérőszámai

Az aszály az egyik legnagyobb természeti katasztrófafaként is számon tartott állapot, amely világszerte a legtöbb embert érinti. Az aszály pontos megfogalmazása körül nagy a bizonytalanság, ami annak tudható be, hogy az aszály fogalmát több tudományágban is használják, figyelembe véve a csapadék, a csapadék és a párolgás vagy a talajnedvesség adatait.¹³ Az agrometeorológiában a Palmer-féle definíció terjedt el, amely szerint az aszály tartós és jelentős vízhiány, amely negatív hatást gyakorol a mezőgazdaságra, a vízgazdálkodásra és a bioszférára.¹⁴

Ahogy az aszály definíciója, úgy a jellemzéséül szolgáló mérőszámok és azok kiszámítása sem egységes. A legtöbb ilyen jellemzés az előző évek időszakaiból származtatott átlagokat és az attól való eltérést írja le, míg más számítások figyelembe veszik a hőmérsékletet, illetve a kipárolgás mértékét, vagy a növények vízfelvételének mennyiségét is.

Az aszály mérőszámai két csoportra oszthatók: indikátorokra és indexekre. Az indikátorok mérik a hidrológiai és a meteorológiai paramétereket, mint például a csapadékok mennyiségét, intenzitását, időbeni eloszlását, a hőmérsékletet, a talaj nedvességszázalékát, a levegőmozgást. Az indexek e paramétereket felhasználva matematikai egyenleteket alkalmazva egyetlen számmal jellemzik az aszály mértékét (területi és időbeli kiterjedését). A jelenség komplexitását fokozza, hogy nincs egyetlen átfogó aszályindex, hiszen a Föld különböző pontjain más és más hatást gyakorol a csapadékhiány, illetve a különböző tudományágaknak is más paraméterek a meghatározók. A Magyarországon kifejlesztett aszályindexek közül első helyen kell említeni a Pálfi Imre által 1988-ban megalkotott PAI indexet.¹⁵ Ezt az indexet elsősorban a mezőgazdaságra vonatkozóan, de kimondottan a magyarországi viszonyokhoz alkották meg. A havi csapadékösszeg és a havi középhőmérséklet felhasználásával, egyetlen számértékkel adja meg az indexértéket. Hat aszályossági zónát állapít meg az aszálymentestől (1) a nagyon erősen aszályosig (6). Budapest térsége e skála alapján az ötödik kategóriába, az erősen aszályos zónába tartozik. Megemlítendő a 2015–2016 folyamán kidolgozott Magyar Szárazság Index (Hungarian Drought Index, HDI) is, amely napi gyakorisággal számítható és alkalmas a napi vízhiány/aszály jellemzésére. Legfontosabb újdonsága, hogy aktuális, talajtípusonként differenciált talajnedvességet vesz figyelembe. Számos előnye közt szerepel, hogy a kiszámítása algoritmizálható, szubjektív emberi döntésektől mentes.¹⁶

A legtöbb tanulmány az aszály mezőgazdaságra, biológiai sokféleségre és erdő-tűzveszélyekre gyakorolt hatását emeli ki, kevésbé foglalkozik a városok helyzetével. Az aszályokat kísérő hóhullámok orvometeorológiai, humánegészségügyi hatásai

¹³ URBÁN 1993: 113–135; PÁLFI 2004: 255–264.

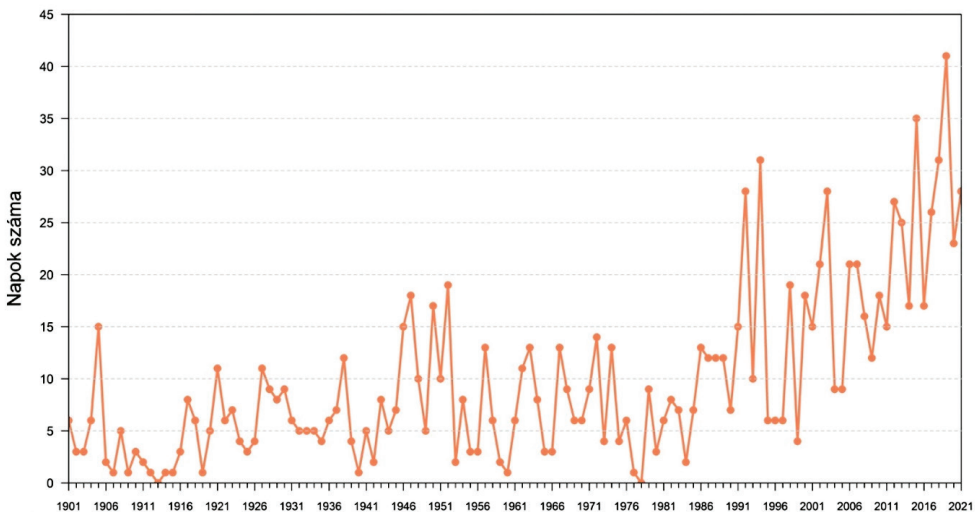
¹⁴ PALMER 1965: 2.

¹⁵ PÁLFI 2004: 258–263.

¹⁶ FIALA 2018: 1–5.

is számottevők. A hőhullámok a nagyvárosokban fokozott gondot jelenthetnek. Budapest az 1 674 014 lakosával (2023. január 1-jei KSH-adat) hazánk egyetlen világvárosa. A második legnépesebb városunk Debrecen, lakossága már jóval kisebb, csupán 191 428 fő (2023. január 1-jei KSH-adat). Ha ehhez hozzávesszük, hogy hazánk népességének 71%-a városban él, az urbanizáció trendszerű folyamat Magyarországon, a városokban pedig a lélekszám növekedésével fokozódik az aszályos és meleg időszakokban a hőszigetelés, akkor indokolt a főváros vizsgálata, a hőszigetelés megértése és az ellene való védekezés lehetőségeinek feltárása.

1901 és 2021 között lineáris trenddel becsülve több mint 7 nappal nőtt a hőhullámos napok száma Magyarországon. (Hőhullámos napnak nevezzük a legalább 25 °C-os napi középhőmérsékletű napokat.) A legtöbb hőhullámos nap 2015-ben fordult elő, ekkor átlagosan 28 ilyen napot detektáltunk, kevéssel maradt el ettől 2012 és 2021, amely években sorra 24 és 21 hőhullámos nap fordult elő országos átlagban.¹⁷ A napi középhőmérséklet mellett a minimumhőmérsékletek vizsgálata is elterjedt a legforróbb időszakok elemzésében, mivel a hőhullámos időszakok rendszerint meleg éjszakákkal járnak együtt. Azokat az éjszakákat, amikor a minimumhőmérséklet nem csökken 20 °C alá, trópusi éjszakának nevezzük. Az 1901 és 1921 közötti OMSZ-adatokból (1. ábra) megállapítható, hogy Budapest belterületén az utóbbi évtizedekben meredeken nőtt a trópusi éjszakák száma, a legtöbb ilyen éjszaka (41) ezen időszakon belül 2019-ben fordult elő.

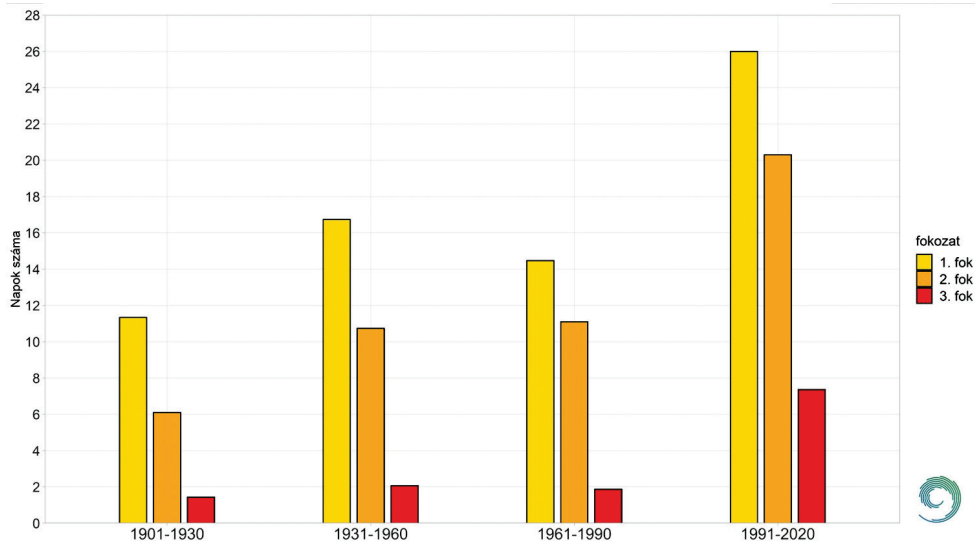


1. ábra: A trópusi éjszakák számának éves összegei Budapest-belterület állomáson az 1901–2021 időszakban

Forrás: BOKROS–LAKATOS 2022.

¹⁷ BOKROS–LAKATOS 2022.

Egy további OMSZ-statisztika¹⁸ is alátámasztja Budapest belterületének hóhullámmal való veszélyeztetettségét. A Nemzeti Népegészségügyi Központ háromfokozatú hőségriasztást alkalmaz. Megvizsgálhatjuk az 1901 és 2020 közötti években a különböző hőségriasztási fokozatok bekövetkezési gyakoriságát (2. ábra). Ha ebben az időintervallumban összehasonlítjuk a négy egymást követő harmincéves időszakot, akkor azt tapasztaljuk, hogy mind az első (legalább 25 °C-os napi középhőmérséklet), mind a második és harmadik fokú hőségriasztással (legalább 3 napig 25 °C, illetve 27 °C vagy annál magasabb a napi középhőmérséklettel érintett napok száma) növekvő trendet követ.



2. ábra: A hőségriadó különböző fokozatainak megfelelő napok átlagos száma évente Budapest-belterület állomáson

Forrás: BOKROS–LAKATOS 2022.

Az aszályok és a hóhullámok a civil védelmi, népegészségügyi feladatok mellett a katonai erőkre is hatással vannak. A hóhullámok és az aszályok, valamint a szélsőségesessé váló csapadékviszonyok jelentős és tartós nem harci jellegű fenyegetést jelentenek a katonák egészségére, kiképzésére és művelleti tevékenységük hatékony elvégzésére.¹⁹ Ez fokozottan igaz bizonyos tevékenységekre, mint amilyen például a katonai vegyvédő. Például a vegyvédő felszerelés viselése kétszeresére növeli a szükséges pihenések időtartamát, mivel ebben a felszerelésben nagymértékben csökken a szervezet hőleadási képessége.²⁰ Hőség hatására a szervezet hőleadási képessége

¹⁸ BOKROS–LAKATOS 2022.

¹⁹ MORAN et al. 2023: 60.

²⁰ KOHUT 2008.

romolhat, a hőleadás zavart szenvedhet, aminek következménye a testhőmérséklet kóros tartományba emelkedése.²¹

Az aszályok és a hóhullámok a katonák személyes teljesítőképességen túl a katonai kihívások természetében is változást hozhatnak.²² Hazánkban a menekültek ellenőrzése, az illegális migráció elleni védelem (kezdve a hírszerzéstől és az államhatár védelmétől a menekült tranzitforgalom szervezéséig) az a terület, amelyben kiemelt szerepe van a meleg (nyári) periódusoknak.²³ A menekült tranzitforgalom szempontjából fontos szerepet kap fővárosunk, ezen belül is a három nagy vasúti személypályaudvar és a Liszt Ferenc Nemzetközi Repülőtér.

A Markov-láncok rövid elméleti összefoglalója

A matematikában a Markov-lánc olyan diszkrét sztochasztikus folyamatot jelent, amely Markov-tulajdonságú. Ez azt a tulajdonságot jellemzi, hogy a jövőbeni állapotok lehetséges alakulásainak valószínűsége csupán a jelenbeli állapottól függ. Másképpen fogalmazva, adott jelen mellett a jövő feltételesen független a múlttól. Tehát a múlt nem ad előrejelzést a jövőre nézve, csupán a jelenlegi helyzetből kiindulva tudhatjuk, hogy milyen kimenetek a lehetségesek.

Jelöljék valamely rendszer állapotait a $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ időpontokban az $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ valószínűségi változók felvett értékei. Legyen a t_0 időpontban $X_0 = x_0$, és a t_n időpontban i , a t_{n+1} időpontban j állapotban a rendszer, azaz $X_n = i$ és $X_{n+1} = j$. Egylépéses átmenetvalószínűségnek nevezzük azt a valószínűséget, hogy X_{n+1} a j állapotban van, feltéve, hogy X_n az i állapotban van. Képlettel: $P_{ij}^{n,n+1} := P(X_{n+1} = j | X_n = i)$.

Ha az egylépéses átmenetvalószínűségek függetlenek n -től, azaz az időtől, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-folyamatnak *stacionáriusak az átmenetvalószínűségei*.²⁴ A Markov-láncok döntő többsége rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ezeket *homogén Markov-láncoknak* nevezzük. Ebben az esetben $P_{ij}^{n,n+1} := P_{ij}$. A P_{ij} számokat mátrixformába rendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

A $\mathbf{P} = (P_{ij})$ mátrixot a folyamat *átmenetvalószínűség-mátrixának* nevezzük. A \mathbf{P} minden egyes P_{ij} eleme annak a valószínűségét jelenti, hogy az állapotok értéke az i -ből j -be megy át egy lépésben. Egy lépés egy időegységnek tekinthető. A P_{ij} mennyiségek nemnegatív számok, sorösszegük egységnyi, mert valamely esemény soronként biztosan bekövetkezik. A főátlóban szereplő értékek a helyben maradás valószínűségét adják meg, és a mátrix egy sora eloszlást fejez ki. Az átmenetvalószínűségeken kívül az úgynevezett φ_0 kezdeti eloszlás határozza meg a Markov-láncot. Ez egy n

²¹ RADICS 2016: 39–44.

²² FÖLDI–PADÁNYI 2022: 37–48.

²³ TÁRIK–PÁRDUCZ 2023.

²⁴ KARLIN–TAYLOR 1985: 54–56.

hosszúságú vektor, amely az egyes állapotokban való tartózkodás valószínűségeit adja meg. Adott φ_0 esetén k lépés múlva az eloszlás: $\varphi_k = \varphi_0 \mathbf{P}^k$. Jelölje $P_{ij}^{(n)}$ azt az átmenetvalószínűséget, hogy a rendszer n lépésben megy át az i állapotból a j állapotba. A Markov-láncot *ergodikusnak* nevezzük, ha léteznek a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = P_j \quad (2)$$

határértékek (*határvalószínűségek*), amelyek i -től függetlenek, és

$$\sum_{j=0}^n P_j = 1 \quad (3)$$

tehát a j -edik oszlop elemei egyenlők, és a mátrix sorösszege egységnyi.²⁵ A határvalószínűségekből alkotott *határmátrix* (\mathbf{P}^*) az ergodikus Markov-láncok határeloszlására vonatkozó *Markov-tétel* alapján:

$$\mathbf{P}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_n \\ P_0 & P_1 & \dots & P_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0 & P_1 & \dots & P_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

A határmátrix minden sora egyforma. A határvalószínűségek által alkotott valószínűség-eloszlást *stacionárius* vagy *határ-* vagy *invariáns* eloszlásnak is nevezzük. (A \mathbf{P}^* mátrix további hatványozásra nem változik.) A P_0, P_1, \dots, P_n valószínűségek azt fejezik ki, hogy mekkora valószínűséggel találjuk a rendszert hosszú állapotváltozások sorozata után az egyes $0, 1, \dots, n$ állapotokban. Az invariáns eloszlás számításánál a lényeg tehát az, hogy az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixot addig hatványozzuk, amíg az oszlopainak elemei állandósulnak.²⁶

Aszályos időszakok Budapest térségében

Az aszályos időszakok kutatásakor a hazai mezőgazdaság számára kiemelkedően fontos vegetációs időszakot vizsgáltuk. Mivel a tényleges vegetációs időszak növényfajonként változik,²⁷ és sok más tényező, köztük az éghajlatváltozás is befolyásolja,²⁸ így egy önkényesen kijelölt hosszabb időszakot (április 1-jétől október 31-ig, összesen 214 nap) elemeztünk.

Tíz év aszályos időszakaiból (2011–2020) számítottuk ki hosszú távra a Markov-modellel az aszályos időszakba eső napok valószínűségeit. A bevezetésben már említettük, hogy a módszer jogosságát Freidooni és társai megmutatták, de más kutatók is alátámasztották ugyanezt.²⁹

²⁵ KONTUR et al. 1993: 507–508.

²⁶ MARKOV 1906: 135–156; SENETA 1996: 255–263.

²⁷ MESTERHÁZY et al. 2015: 40–41.

²⁸ LAKATOS 2019: 14–16.

²⁹ ALIZADEH 2013.

A modell alkalmazásakor minden egyes évhez kiszámítottuk az aszályos időszakba eső napok határvalószínűségeit. Fontos azonban tisztázni, hogy az aszály melyik megfogalmazása lenne a leghasznosabb számunkra. Egy adott vizsgálat során maga a kutató határozhatja meg a jelentős vízhiányt jelentő küszöbértéket, s azt is, hogy ezt milyen hosszú időszakra vonatkozóan elemzi.

Az állami kárenyhítési szabályok szerint aszálynak minősül az a

„kedvezőtlen időjárási jelenség, amelynek során a kockázatviselés helyén az adott növény vegetációs időszakában harminc egymást követő napon belül a lehullott csapadék összes mennyisége a 10 millimétert nem éri el, vagy a lehullott csapadék összes mennyisége a 25 millimétert nem éri el, de ennél a feltételnél a napi maximum hőmérsékletnek a harminc nappal haladnia a 31°C-ot”.³⁰

Kutatásunkban ez utóbbi definíciót vettük alapul annyi módosítással, hogy a harminc egymást követő napot huszonötre csökkentettük. Az alábbi, 1. táblázat tartalmazza az aszályos időszakokat 2011-től 2020-ig a budapesti mérések alapján.

1. táblázat: A vegetációs periódusra vonatkozó aszályos időszakok Budapest térségében (2011–2020)

Év	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Időszakok száma	3	3	3	3	3	3	3	4	4	2
Időszakba eső napok száma	147	113	112	92	94	78	90	129	147	90
Időszakok kezdete és vége	04.01. 05.07.	04.08. 05.11.	04.03. 05.01.	04.01. 04.25.	04.01. 05.12.	04.01. 04.26.	05.24. 06.27.	04.01. 04.25.	04.10. 05.03.	04.01. 05.23.
	06.15. 07.18.	06.26. 07.23.	06.29. 08.25.	05.25. 06.28.	06.12. 07.07.	06.16. 07.12.	07.12. 08.05.	06.30. 07.20.	06.23. 07.26.	09.01. 09.25.
	08.05. 10.19.	07.29. 09.18.	09.17. 10.11.	09.15. 10.16.	07.10. 08.04.	08.23. 09.16.	09.22. 10.21.	07.24. 08.22.	07.29. 09.06.	
								09.05. 10.27.	09.10. 10.28.	

Forrás: a szerzők szerkesztése

³⁰ 2011. évi CLXVIII. törvény 2. § (1) bekezdés.

A határeloszlások számítása

Először kiszámítjuk a 2011-es évet alapul véve az aszályos időszakba eső napok valószínűségeit hosszú távra a Markov-láncok segítségével. A 0 állapot legyen a nem aszályos időszakba tartozó nap, míg az 1 állapot az aszályos időszak napja. Az átmenetgyakorisági mátrix ekkor:

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 2 \\ 3 & 144 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Az értelmezéshez vegyük például a g_{01} elemet. Ez az érték 2, mivel kétszer fordult elő, hogy nem aszályos periódusú nappól tértünk át aszályos időszakba eső napra. A g_{11} elemet nézve megállapíthatjuk, hogy összesen 147 aszályos időszakba eső napunk volt, így 144 átmenet volt az ebbe az állapotba tartozó napok között (az időszakok első napjaitól indulnak az átmenetek, tehát mivel 3 aszályos időszak volt, így $147 - 3 = 144$ átmenet van). A g_{00} elemet vizsgálva láthatjuk, hogy $214 - 147 = 67$ nem aszályos időszakba tartozó nap volt 3 periódusban (az időszakok első napjaitól indulnak az átmenetek, tehát mivel 3 nem aszályos időszak volt, így $67 - 3 = 64$ átmenet van). Az átmenetgyakorisági mátrixból megkapjuk az átmenetvalószínűségi mátrixot:

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_{00}}{g_{00}+g_{01}} & \frac{g_{01}}{g_{00}+g_{01}} \\ \frac{g_{10}}{g_{10}+g_{11}} & \frac{g_{11}}{g_{10}+g_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{64}{66} & \frac{2}{66} \\ \frac{3}{147} & \frac{144}{147} \end{pmatrix} \quad (6)$$

A Markov-láncokkal kapcsolatban célunk mindig a hosszú távú viselkedésük vizsgálata. Ez tulajdonképpen a P^n vizsgálatát jelenti nagy n -ek esetén. Ahogy a Markov-láncokról szóló fejezetben írtuk, az egy lépéses átmenetvalószínűségi mátrixot addig hatványozzuk, amíg az oszlopainak elemei állandósulnak. Az átmenetmátrixok segítségével becsléseket adhatunk arra vonatkozóan, hogy a jövőben egy nap aszályos vagy csapadékos időszakba fog-e esni. A számításokat Excelben végeztük el, a 256. hatványnál az oszlopokra teljes azonosságot kaptunk. A számításokból adódott, hogy $P_0 = 0,392$ és $P_1 = 0,608$. Tehát hosszú távon 60,8% az esélye egy aszályos időszakba tartozó napnak a vegetációs időszakban. (Érdemes összevetni az eredményeket a klasszikus valószínűségi számítással kapott eredményekkel. A „kis” különbség is az ismertett módszer jogosultságát mutatja. Például 2012-ben az aszályos nap határvalószínűsége 0,536 lett. Ebben az évben a vizsgált 214 nappól 113 nap esett aszályos időszakba. Tehát a valószínűség $113/214=0,528$, ami „igen közel” van a 0,536-hoz.)

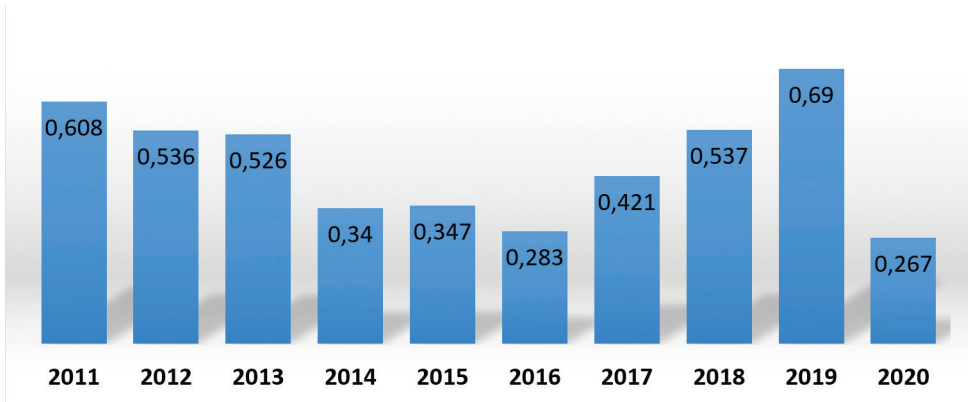
Hasonló módon számítható ki az invariáns eloszlása a többi évnél is, ezeket nem részletezzük, de az átmenetvalószínűségi mátrixokat és a határeloszlásokat a 2. táblázatba foglaljuk.

2. táblázat: Az átmenet-valószínűségi mátrixok és határeloszlások (2011–2020)

Év	P	(P0, P1)
2011	$\begin{pmatrix} 0,969 & 0,031 \\ 0,02 & 0,98 \end{pmatrix}$	(0,392 ; 0,608)
2012	$\begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,026 & 0,974 \end{pmatrix}$	(0,464 ; 0,536)
2013	$\begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,027 & 0,973 \end{pmatrix}$	(0,474 ; 0,526)
2014	$\begin{pmatrix} 0,983 & 0,017 \\ 0,033 & 0,967 \end{pmatrix}$	(0,66 ; 0,34)
2015	$\begin{pmatrix} 0,983 & 0,017 \\ 0,032 & 0,968 \end{pmatrix}$	(0,653 ; 0,347)
2016	$\begin{pmatrix} 0,985 & 0,015 \\ 0,038 & 0,962 \end{pmatrix}$	(0,717 ; 0,283)
2017	$\begin{pmatrix} 0,976 & 0,024 \\ 0,033 & 0,967 \end{pmatrix}$	(0,579 ; 0,421)
2018	$\begin{pmatrix} 0,964 & 0,036 \\ 0,031 & 0,969 \end{pmatrix}$	(0,463 ; 0,537)
2019	$\begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,027 & 0,973 \end{pmatrix}$	(0,31 ; 0,69)
2020	$\begin{pmatrix} 0,992 & 0,008 \\ 0,022 & 0,978 \end{pmatrix}$	(0,733 ; 0,267)

Forrás: a szerzők szerkesztése

A 3. ábrán szereplő határvalószínűségek átlagát véve 0,4555 adódik, tehát mondhatjuk, hogy a jövőben átlagosan ekkora valószínűséggel lesz a vegetációs időszak egy napja az aszályos periódusban, ami már igen figyelemre méltónak számít.



3. ábra: Az aszályos időszakba eső napok határvalószínűségei Budapest térségében (2011–2020)

Forrás: a szerzők szerkesztése

A 10 éves idősor alapján megvizsgáltuk az aszályos időszakok között eltelt időt is. A vegetációs időszakon belül ennek átlaga 30,6 nap, szórása 24,7 nap. X^2 próbával igazoltuk 95%-os valószínűségi szinten, hogy az eloszlás közelítőleg exponenciális. Ehhez a 10 éves adatsor alapján az aszályos időszakok között eltelt napok számát kategorizáltuk. Ezt mutatja a 3. táblázat.

3. táblázat: Az aszályos időszakok között eltelt napok számának kategorizálása a X^2 próbához

Aszályos időszakok között eltelt napok száma	0–15	16–30	31–45	46–60	61–
Észlelt	10	3	4	6	2
Exponenciális eloszlás szerint feltételezett	10	6	3	3	3

Forrás: a szerzők szerkesztése

A X^2 számított értéke a próba alapján (a szabadsági fokok száma 4):

$$\sum_{i=1}^5 \frac{(\text{észlelt}_i - \text{feltételezett}_i)^2}{\text{feltételezett}_i} = 5,17 \quad (7)$$

A X^2 eloszlás táblázatában a megfelelő érték 9,49, ami lényegesen magasabb, mint a számított érték, ezért az exponenciális eloszlás bizonyított. Az exponenciális eloszlás alapján becsülhetjük tehát annak valószínűségét is, hogy két aszályos időszak között mennyi idő telik el.

Összefoglalás

Kutatásunkban Budapest térségének 2011–2020 közötti csapadékadatából kiindulva rámutattunk arra, hogy számottevő a valószínűsége (45,55%) annak, hogy a növények vegetációs időszakának egy napja az aszályos periódusba esik.

A kutatásban használt matematikai modell a Markov-láncok elméletét használja fel, amely viszonylag újszerűnek számít a csapadékviszonyok statisztikai elemzésében. Meghatároztuk az egyes évekhez tartozó átmeneti valószínűségi mátrixokat, és ezek hatványozásával megkaptuk a határvalószínűségeket. Adatsorunkból hipotézisvizsgálattal (X^2 próba) bizonyítottuk, hogy az aszályos időszakok között eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Vizsgálati eredményeink további kutatások alapjait képezhetik: segíthetnek a hatékonyabb településrendezési és -fejlesztési feladatok kijelölésénél, de felhasználhatók a katonai haderőfejlesztésben és a humánegészségügyi igazgatásban is.

Irodalomjegyzék

- ALIZADEH, A. (2013): *The Principles of Applied Hydrology*. 36th Edition. Mashhad: Imam Reza University, Mashhad.
- BARTHOLY Judit et al. (2011): Hazai éghajlati tendenciák. In BARTHOLY Judit – BOZÓ László – HASZPRA László (szerk.): *Klímaváltozás – 2011, Klímaszcenáriók a Kárpát-medence térségére*. Budapest: Magyar Tudományos Akadémia és az Eötvös Loránd Tudományegyetem Meteorológiai Tanszéke, 146–169.
- BOKROS Kinga – LAKATOS Mónika (2022): *Hőhullámok Magyarországon*. Országos Meteorológiai Szolgálat. Online: www.met.hu/ismeret-tar/erdekesssegek_tanulmanyok/index.php?id=3196&hir=Hohullamok_Magyarorszagon
- FEKETE Árpád – KEVE Gábor (2020): A csapadékösszegek és az aszályos időszakok vizsgálata Markov-láncokkal. *Hidrológiai Közlöny*, 100(4), 60–70.
- FIALA Károly et al. (2018): *Development of an Operational Drought and Water Scarcity Monitoring System in Hungary*. Global Water Partnership.
- FÖLDI, László – PADÁNYI, József (2022): Climate Change as a Challenge to the Armed Forces. *Sodobni Vojaski Izzivi/Contemporary Military Challenges*, 24(4), 37–48. Online: <https://doi.org/10.33179/bsv.99.svi.11.cmc.24.4.2>
- FREIDOONI, Farnood – ATAIEI, Hooshmand – SHAHRIAR, Fatemeh (2015): Estimating the Occurrence Probability of Heat Wave Periods Using the Markov Chain Model. *Journal of Sustainable Development*, 8(2), 26–45. Online: <https://doi.org/10.5539/jsd.v8n2p26>
- HAAN, C.T. – ALLEN, D. M. – STREET, J. O. (1976): A Markov Chain Model for Daily Rainfall. *Water Resources Research*, 12(3), 443–449. Online: <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00443>
- KARLIN, Samuel – TAYLOR, Howard M. (1985): *Sztochasztikus folyamatok*. Budapest: Gondolat.
- KOCSIS Károly szerk. (2018): *Magyarország Nemzeti Atlasza – Természeti környezet*. Budapest: MTA CSFK Földrajztudományi Intézet.

- KOHUT László (2008): *Extrém fizikai terhelésnek kitett katonai állomány keringési és élettani vizsgálata*. PhD-disszertáció. Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem, Bolyai János Katonai Műszaki Doktori Iskola.
- KONTUR István et al. (1993): *Hidrológiai számítások*. Budapest: Akadémiai.
- KSH (2022): *Főbb növénykultúrák terméseredményei*. Online: www.ksh.hu/s/kiadvanyok/fobb-novenykulturak-termeseredmenyei-2022/index.html
- LAKATOS Mónika et al. (2014): A klímaváltozás magyarországi jelei. *Légkör*, 59(4), 158–163.
- LAKATOS Mónika (2019): Korábban kezdődő vegetációs időszak – Előny vagy hátrány? *Agrofórum*, 30(2), 14–16.
- MARKOV, A. A. (1906): Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga. *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete*, 2-ya seriya, 15(94), 135–156.
- MESTERHÁZY Ildikó et al. (2015): A vegetációs időszak számításának módszerei. *Agrofórum Extra*, 61. 40–41.
- MORAN, Daniel S. et al. (2023): Beating the Heat: Military Training and Operations in the Era of Global Warming. *Journal of Applied Physiology*, 135(1), 60–67. Online: <https://doi.org/10.1152/jappphysiol.00229.2023>
- Országos Meteorológiai Szolgálat (2022). Online: www.met.hu/eghajlat/eghajlatvaltozas/megfigyelt_hazai_valtozasok/homerseklet_es_csapadektrendek/csapadek_szelsosegek
- PADÁNYI József – HALÁSZ László (2012): *A klímaváltozás hatásai*. Budapest: Nemzeti Közszerológiai Egyetem.
- PALMER, Wayne C. (1965): *Meteorological Drought*. Research Paper No. 45. Washington: Office of Climatology.
- PÁLFAI Imre (2004): *Belvizek és aszályok Magyarországon. Hidrológiai tanulmányok*. [h. n.]: Közlekedési Dokumentációs Kft.
- RÁCZ Tibor – WALTNER István – GELYBÓ Györgyi (2022): Városi csapadékvízgyűjtő tározó méretének vizsgálata az 1901–2020 időszak napi meteorológiai adatai alapján. *Journal of Central European Green Innovation*, 10(2), 38–58. Online: <https://doi.org/10.33038/jcegi.3553>
- RADICS Judit (2016): A klímaváltozás – elsősorban a hőség – lehetséges hatásai az emberi szervezet működésére, különös tekintettel a pszichiátriai gyógyszereket szedő páciensekre. *Neuropsychopharmacologia Hungarica*, 18(1), 39–44.
- SENETA, Eugene (1996): Markov and the Birth of Chain Dependence Theory. *International Statistical Review*, 3(64), 255–263. Online: <https://doi.org/10.2307/1403785>
- TÁRIK Mészár – PÁRDU CZ Árpád (2023): *Migrációs helyzet a csúcstalálkozók után – A déli határszakasz aktualitásai*. Migrációkutató Intézet Gyorselemzések 2023/6.
- URBÁN L. (1993): Az aszály fogalma és jelentősége. In *Beszámolók 1989*. Budapest: OMSZ, 113–135.

Jogi forrás

2011. évi CLXVIII. törvény a mezőgazdasági termelést érintő időjárás és más természeti kockázatok kezeléséről