HADMÉRNÖK

XIII. Évfolyam 3. szám – 2018. szeptember

A HIBATŰRŐ KÉPESSÉG NÖVELÉSE KRITIKUS INFRASTRUKTÚRÁKBAN

INCREESING THE FAULT TOLERANCE OF CRITICAL INFRASTRUCTURES

ZENTAI Dániel

(ORCID: 0000-0002-3321-2013)

zentai.daniel@bgk.uni-obuda.hu

Absztrakt

A kritikus infrastruktúrák hálózatokat alkotnak, legyen szó akár vasúthálózatról, úthálózatról, elektromos hálózatról, vagy informatikai hálózatról. Ezen hálózatok matematikai elemzése gráfelméleti módszerek segítségével történhet. Kritikus infrastruktúrákkal szemben természetes elvárás lehet, hogy egy (vagy esetleg néhány) infrastruktúra elem meghibásodása esetén az infrastruktúra összefüggő maradjon, azaz lehetőség szerint ne jöjjenek létre egymástól elválasztott komponensek a hálózatban. Ezen hibatűrő képesség gráfelméleti megfelelője a többszörös összefüggőség, melynek kiszámítására ismertek hatékony algoritmusok. Fontos kérdés, hogy ha egy kritikus infrastruktúra nem teljesít bizonyos gráfelméleti megbízhatósággal kapcsolatos követelményeket, akkor hogyan lehet a lehető legkisebb költséggel kibővíteni az infrastruktúrát oly módon, hogy ezen követelményeknek eleget tegyen.

A cikk kutatásaihoz az Új Széchenyi Terv keretein belül az EFOP-3.6.2-16-2017-00016 számú projekt biztosított forrást. A kutatás az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Kulcsszavak: *kritikus infrastruktúrák, gráfelmélet*

Abstract

Critical infrastructures form networks, including railway networks, road networks, electronic networks, or computer networks. Mathematical analysis of these networks is often done with graph theory. We can set up a natural requirement regarding to critical infrastructures, namely, even if some failures occur in the infrastructure, and some component become unreachable for a while, the infrastructure itself has to remain connected, i.e. we have to avoid separated components in the infrastructure. This fault tolerance capability is called multiple connectivity in graph theory. Given a critical infrastructure, we can ask the following important question. If the infrastructure does not satisfy some robustness requirements, then what is the minimal cost of the completion of the infrastructure, such that it becomes robust enough to satisfy these requirements.

The research presented in this paper was carried out as part of the EFOP-3.6.2-16-2017-00016 project in the framework of the New Széchenyi Plan. The completion of this project is funded by the European Union and co-financed by the European Social Fund.

Keywords: *critical infrastructures, graph theory*

A kézirat benyújtásának dátuma (Date of the submission): 2018.06.03.
A kézirat elfogadásának dátuma (Date of the acceptance): 2018.09.24.

BEVEZETÉS

Kritikus infrastruktúrák [4,5,7] matematikai modellezésének természetes eszköze a gráfelmélet. Gráfnak nevezzük csomópontoknak élek által összekötött (általában véges) halmazát. Tekinthetünk gráfként egy úthálózatra, ahol a kereszteződések a csomópontok, és az ezeket összekötő útszakaszok az élek, vagy egy infokommunikációs hálózatra, ahol a csomópontok a kommunikáló eszközök, az élek pedig az ezeket összekötő kommunikációs csatorna. A gráfok megbízhatóságának, támadásokkal szembeni állóképességének egy lehetséges mérőszáma a többszörös összefüggőség. Ez a gráfparaméter mutatja meg, hogy hány élt, vagy csomópontot törölhetünk ki a gráfból oly módon, hogy a megmaradt élek és csomópontok továbbra is egy összefüggő gráfot alkossanak. A [6] cikkben gráfok többszörös összefüggőségét vizsgáltuk, itt arra térünk ki, hogy ha egy gráf, illetve a megfelelő kritikus infrastruktúra nem felel meg a követelményeinknek, hogyan lehet a lehető legkevesebb él hozzávételével javítani a megbízhatóságát, azaz növelni az összefüggőségi számát.

GRÁFELMÉLET

Ebben a fejezetben alapvető gráfelméleti fogalmakat ismertetünk, melyek szükségesek lesznek a továbbiak megértéséhez. A gráfelméleti háttér alaposabb megértéséhez javaslom a [2,3] könyveket.

Legyen $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ véges halmaz, és legyen E a V halmaz bizonyos kételemű részhalmazainak egy halmaza, azaz $E \subseteq \binom{V}{2}$. Az ebből a két halmazból álló $G = (V,E)$ rendezett párt véges egyszerű gráfnak nevezzük.

A $V = V(G)$ halmaz elemeit a G gráf csúcsainak, vagy pontjainak, az $E = E(G)$ halmaz elemeit pedig a G gráf éleinek nevezzük. A $G = (V,E)$ gráfban a $v, w \in V$ csúcsokat szomszédosnak nevezzük, ha őket él köti össze, azaz ha $\{v,w\} \in E$. A $G = (V,E)$ gráf irányított gráf abban az esetben, ha minden élének van egy iránya is, azaz megkülönböztetjük a $(v,w) \in E$ élt a $(w,v) \in E$ éltől. Ebben az esetben $E \subseteq \binom{V}{2}$ helyett $E \subseteq V \times V$. A gráfok szokásos geometriai reprezentációjában az éleket irányítatlan esetben szakaszokkal, vagy görbékkel, irányított esetben pedig nyilakkal ábrázoljuk.

A $G = (V,E)$ gráf $v \in V$ csúcsának fokszáma a v szomszédjainak számával egyenlő. A v csúcs fokszámát $d(v)$ jelöli. Irányított gráf esetében megkülönböztetjük a v csúcs befokát és kifokát. A v csúcs befoka azon éleknek a száma, melyeknek végpontja v, a v csúcs kifoka pedig azon élek száma, melyeknek a kezdőpontja v.

A séta a gráfban csúcsok és élek váltakozó $v_0e_1v_1\ldots e_kv_k$ sorozata, ahol mindegyik él a sorozatban őt megelőző és őt követő csúcsokat köti össze, azaz $e_i = \{v_{i-1},v_i\}$. A vonal olyan séta, amelyben egy él legfeljebb egyszer szerepelhet, az út pedig olyan vonal, amelyben minden csúcs is maximum egyszer szerepel. A séta, vonal vagy út hosszának az ezek során érintett élek számát nevezzük.

A $G = (V,E)$ gráfot összefüggőnek nevezzük, ha bármely $u \in V$ pontjából bármely $v \in V$ pontjába vezet u kezdőpontú és v végpontú út. Legyen $G = (V,E)$ nem feltétlenül összefüggő gráf. G ponthalmazának egy $C \subseteq V(G)$ részhalmazát akkor nevezzük összefüggőségi komponensnek, ha teljesül rá, hogy bármely $u \in C$ pontból bármely $v \in C$ pontba vezet út, de semelyik C-beli pontból nem vezet út a $V \setminus C$ halmaz semelyik pontjába sem. A G gráf összefüggőségi komponenseinek számát $c(G)$ jelöli. Egy G gráf tehát pontosan akkor összefüggő, ha $c(G) = 1$.

Többszörös összefüggőség

Hálózatok, és így kritikus infrastruktúrák topologikus értelemben vett hibatűrésének egy természetes mérőszáma a hálózatot, vagy infrastruktúrát modellező gráf többszörös összefüggősége.

Definíció: Azt mondjuk, hogy a G = (V,E) gráf k-szorosan él-összefüggő, vagy röviden k-él-összefüggő, ha G-nek legalább k+1 pontja van (azaz $|V(G)| \geq k+1$), és bárhogyan hagyunk el G-ből legfeljebb k darab élt, a kapott G' gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k értéket, ami a fenti feltételeket teljesíti, a gráf él-összefüggőségi számának nevezzük, és $\lambda(G)$-vel jelöljük.

Definíció: Azt mondjuk, hogy a G = (V,E) k-szorosan összefüggő, vagy röviden k-összefüggő, ha G-nek legalább k+1 pontja van (azaz $|V(G)| \geq k+1$), és bárhogyan hagyunk el G-ből legfeljebb k darab csúcsot, a kapott G' gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k értéket, ami a fenti feltételeket teljesíti, a gráf összefüggőségi számának nevezzük, és $\kappa(G)$-vel jelöljük.

A fentiek közül a k-él-összefüggőség modellezi az összeköttetések, a k-összefüggőség pedig a csomópontok támadásával szemben támasztott megbízhatósági követelményt.

A TÖBBSZÖRÖS ÖSSZEFÜGGŐSÉG NÖVELÉSE

Algoritmikusan könnyedén kiszámolható egy gráf él-összefüggőségi, illetve összefüggőségi száma. Erre szolgálnak a folyamalgoritmusok [1]. Közvetlenül a definíció alapján nem tudnánk hatékonyan kiszámolni egy gráf összefüggőségi számát, így a folyamalgoritmusok sem ezt a módszert követik, hanem a definíció egy ekvivalens átfogalmazását használják. A következő két tétel Menger tételének közvetlen következményei. Menger tételeit az olvasó megtalálhatja [2]-ben.

Tétel: Az alábbiak ekvivalensek:

- A G = (V,E) gráf k-szorosan él-összefüggő.
- Tetszőleges $u,v \in V(G)$ esetén van k darab éldiszjunkt u-v út, azaz k darab olyan u-v út, melyekre teljesül, hogy semelyik kettőnek nincs közös éle.

Tétel: Az alábbiak ekvivalensek:

- A G = (V,E) gráf k-szorosan összefüggő.
- Tetszőleges $u,v \in V(G)$ esetén van k darab belsőleg pontdiszjunkt u-v út, azaz k darab olyan u-v út, melyekre teljesül, hogy semelyik kettőnek nincs közös pontja a kezdőponttól és a végponttól eltekintve.

Alább definiáljuk gráfok lokális él-összefüggőségét, illetve lokális összefüggőségét.

Definíció: Legyen G = (V,E) gráf, és $u,v \in V(G)$ tetszőleges csúcsok. Az u és v csúcsok közötti lokális él-összefüggőség az u és v közötti éldiszjunkt utak maximális száma, melyet $\lambda(u,v)$ jelöl.

Definíció: Legyen G = (V,E) gráf, és $u,v \in V(G)$ tetszőleges csúcsok. Az u és v csúcsok közötti lokális összefüggőség az u és v közötti belsőleg pontdiszjunkt utak maximális száma, melyet $\kappa(u,v)$ jelöl.

Könnyen ellenőrizhető, hogy egy gráf globális él-összefüggőségi száma a lokális él-összefüggőségi számok minimuma, formálisan $\lambda(G) = \min\{\lambda(u,v) \mid u,v \in V(G)\}$. Hasonlóan, egy gráf globális összefüggőségi száma megegyezik a lokális összefüggőségi számok minimumával, azaz $\kappa(G) = \min\{\kappa(u,v) \mid u,v \in V(G)\}$.

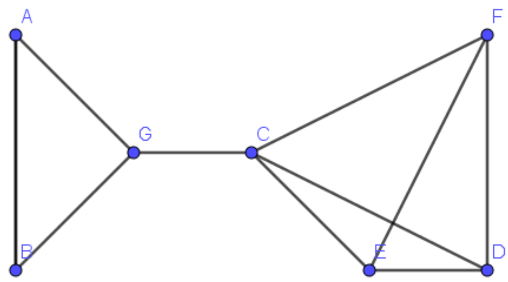
Az alábbiakban arra a kérdésre keressük a választ, hogy ha az általunk vizsgált infrastruktúra (pontosabban az azt modellező gráf) nem teljesíti az általunk támasztott összefüggőségi követelményeket, akkor hogyan tudjuk ezt új összeköttetések létesítésével kibővíteni úgy, hogy eleget tegyen ezen követelményeknek.

Él-összefüggőség

Teljes általánosságban a feladat a következő. Legyen $r : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}+$ egy csúcspárokat pozitív egész számokra képező függvény, és tegyük fel, hogy $\lambda(u,v) < r(u,v)$ legalább egy csúcspárra. Célunk egy olyan $G'=(V,E')$ gráfot konstruálni, melyre teljesül, hogy $\lambda(u,v) \geq r(u,v)$ minden G'-beli csúcspárra, és G'-t minimális összköltségű élek hozzáadásával kaptuk G-ből. A feladatra ebben az általános formában nem várhatunk hatékony algoritmust, ugyanis a probléma NP-teljes.

Jelen esetben mi azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, melyben minden hozzáadott él költsége azonos (azaz a hozzáadott élek darabszámát szeretnénk minimalizálni), illetve $r(u,v) = 2$ minden (u,v) csúcspárra. A továbbiakban tehát azt az esetet részletezzük, amikor a $G=(V,E)$ gráfot minimális darabszámú él hozzáadásával szeretnénk kiegészíteni 2-él-összefüggővé. Erre a speciális esetre ismerünk hatékony algoritmust [1]. Kritikus infrastruktúrák esetében az, hogy csak a 2-él-összefüggőség esetét vizsgáljuk, egy észszerű megszorítást jelent, ugyanis csupán annyit feltételezünk, hogy a támadónak nem áll módjában az infrastruktúra egynél több összeköttetését támadni egyidejűleg.

Az algoritmus részletezése előtt szükségünk lesz a következő fogalmakra. A G gráf egy e éle elvágó él, ha a $G''=(V,E \setminus \{e\})$ gráf már nem összefüggő, azaz ha az e él törlésével a gráf több komponensre esik szét.



1. ábra Nem 2-él-összefüggő gráf

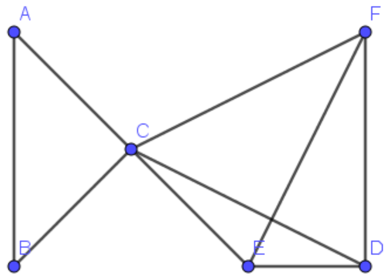
A fenti ábrán láthatunk egy példát olyan gráfra, amely nem 2-él-összefüggő, ugyanis $\{C,G\}$ egy elvágó él. Könnyen látható azonban, hogy az $\{A,F\}$ és hozzáadásával már 2-él-összefüggő gráfot kapunk. Blokkoknak hívjuk a G gráf elvágó élt nem tartalmazó maximális részgráfjait. Egy olyan blokkot, amire mindössze egy darab elvágó él illeszkedik, levélblokknak hívunk. Két blokk távolságán az őket összekötő legrövidebb utat értjük. Ezek után rátérhetünk a fent említett algoritmusra:

Algoritmus: Legyen kezdetben $G'=G$. Amíg a $G'=(V,E')$ gráf nem 2-él-összefüggő, válasszunk 2 olyan levélblokkot, amelyek távolsága maximális. Adjunk hozzá G'-höz egy olyan f élt, ami ezen levelek egy-egy tetszőleges pontját köti össze, azaz legyen $G'=(V,E' \cup \{f\})$.

Látható, hogy minden egyes él hozzáadása 2-vel csökkenti a levélblokkok számát, azt az esetet kivéve, amikor összesen 3 levélblokk van. (Ez utóbbi esetben csak 1-gyel csökken a levélblokkok száma.) Ebből következik, hogy G kiegészítése 2-él-összefüggővé legkevesebb $\lceil L(G)/2 \rceil$ él hozzáadásával történhet, ahol $L(G)$ jelöli G levélblokkjainak a számát.

Csúcs-összefüggőség

Az előbbiekhez hasonlóan az általános feladatban legyen $r : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}+$ egy csúcspárokat pozitív egész számokra képező függvény, és tegyük fel, hogy $\kappa(u,v) < r(u,v)$ legalább egy csúcspárra. Célunk egy olyan G'=(V,E') gráfot konstruálni, melyre teljesül, hogy $\kappa(u,v) \geq r(u,v)$ minden G'-beli csúcspárra, és G'-t minimális összköltségű élek hozzáadásával kaptuk G-ből. Az él-összefüggőségi esethez hasonlóan erre a feladatra sem várhatunk az általános esetben hatékony algoritmust, azonban most is elegendő lesz azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, melyben minden hozzáadott él költsége azonos, illetve r(u,v) = 2 minden (u,v) csúcspárra. Továbbra is élünk ugyanis azzal a feltevéssel, hogy a támadó egyidejűleg csak egy csomópontját támadja az infrastruktúrának. Most is szükségünk lesz az él-összefüggőségi esettel analóg fogalmakra. A G gráf egy v csúcsa elvágó csúcs, ha a G''=(V \ {v},E \ F) gráf már nem összefüggő, ahol F a v csúcsra illeszkedő élek halmaza, azaz ha a v csúcs törlésével a gráf több komponensre esik szét.



2. ábra

A fenti ábrán láthatunk egy példát olyan gráfra, amely nem 2-összefüggő, ugyanis C egy elvágó csúcs. Könnyen látható azonban, hogy az {A,F} és hozzáadásával már 2-összefüggő gráfot kapunk. Blokkoknak hívjuk a G gráf elvágó csúcsot nem tartalmazó maximális részgráfjait. Egy olyan blokkot, amire mindössze egy darab elvágó csúcs illeszkedik, most is levélblokknak hívunk. Két blokk távolságán az őket összekötő legrövidebb utat értjük. Legyen továbbá $b(G) = \max\{c(G - v) : v \in V\}$, ahol G – v jelöli a G''=(V \ {v},E \ F) gráfot. Tehát b(G) az a maximális érték, ahány komponens keletkezik a legtöbb komponenst létrehozó v csúcs törlésével. Ezek után az algoritmus a következő:

Algoritmus: Legyen kezdetben G'=G. Amíg a G'=(V,E') gráf nem 2-összefüggő, válasszunk 2 olyan levélblokkot, amelyek távolsága maximális. Adjunk hozzá G'-höz egy olyan f élt, ami ezen levelek egy-egy tetszőleges pontját köti össze, azaz legyen $G'=(V,E'\cup\{f\})$.

Az algoritmus tehát megegyezik az él-összefüggőségi esetben említett algoritmussal, a hozzáadandó élek száma azonban változni fog ebben az esetben. Belátható ugyanis, hogy G kiegészítése 2-összefüggővé legkevesebb $\max\{\lceil L(G)/2 \rceil, b(G)-1\}$ él hozzáadásával történhet, ahol L(G) jelöli G levélblokkjainak a számát.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] JORDÁN T., RECSKI A., SZESZLÉR D.: Rendszeroptimalizálás, Typotex kiadó, Budapest, 2004

[2] KATONA Y. Gy, RECSKI A., SZABÓ Cs.: A számítástudomány alapjai, Typotex kiadó, Budapest, 2002

[3] LOVÁSZ L., PELIKÁN J., VESZTERGOMBI K.: Diszkrét matematika. Typotex kiadó, Budapest, 2010

[4] Miniszterelnöki Hivatal Informatikai Tárcaközi Bizottsága (MeH ITB) 12. számú ajánlása – BODALKI Á., CSERNAY A., MÁTYÁS P., MUHA l., PAPP Gy., VADÁSZ D.: Informatikai Rendszerek Biztonsági Követelményei – Budapest, 1996.

[5] BABOS T.: The First Critical Infrastructure Protection Research Project in Hungary, Springer Publishing Company, 2016, 1-22. old.

[6] ZENTAI D.: Gráfelméleti módszerek a kritikus infrastruktúra védelemben, Hadmérnök, XII. Évfolyam 2. pp. 341-347.

[7] http://uni-nke.hu/downloads/konyvtar/kovasz/kritikus_infrastrukturak.pdf (letöltve: 2017.11.20.)